論理と集合要約 NO.5

第 5 回目の主題：$\boxed{\text{集合の演算の例}}$

集合を扱う際は個々の元を取り出し、諸性質を論理で証明する。

例えば、$A = 6\mathbb{Z}$, $B = 2\mathbb{Z}$ にたいして、$A \subset B$ を示すには、

(1) A の各元 x について、
(2) $x = 6n = 2(3n)$ であることを示し、
(3) $x = 2(3n) \in B$ と結論する。

というステップを踏む。

同様に、$A_2 = \{x \in \mathbb{R} | x > 20\}$, $B_2 = \{x \in \mathbb{R} | x^4 - 7x - 9 > 0\}$ に対して、$A_2 \subset B_2$ を示すには、

(1) A_2 の各元 x について、
(2)
$$x^4 - 7x - 9 \geq x^4 - 10x^3 - 10x^3 \geq x^3(x - 20) > 0$$
であることを示し、
(3) $x \in B_2$ と結論する。

と良い。

問題 5.1. 実係数の多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ が、$a_n > 0$ を満たすとする。$M = \frac{n}{a_n}\max\{|a_n|, |a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \ldots, |a_0|\}$ とおくと、
$$\{x \in \mathbb{R} | x > M\} \subset \{x \in \mathbb{R} | f(x) > 0\}$$
が成り立つことを示しなさい。

集合の一般論でも同様。

問題 5.2. 集合 A, B, C, D に対して、
$$(A \subset C \text{ and } B \subset D) \implies A \cup B \subset C \cup D$$
を示しなさい。

問題 5.3. 集合 X, Y, Z に対して、$X \subset Y \implies Z \setminus X \supset Z \setminus Y$ を示しなさい。

問題 5.4. 集合族 $\{A_i\}, \{B_i\}$ が与えられた時、包含関係
$$(\cup A_i) \setminus (\cup B_i) \subset \cup (A_i \setminus B_i)$$
および
$$(\cap A_i) \setminus (\cap B_i) \supset \cap (A_i \setminus B_i)$$
を示しなさい、