代数学 II 要約 NO.9

まず次のことに注意しておこう。

補題 9.1. A を PID, $a, b \in A$ は互いに素であるとする。このとき、A-加群として、同型

$$A/(ab) \cong A/(a) \oplus A/(b)$$

が成り立つ。

加群の直和について、講義では上野補題を含めすでに何回か言及してきた。次のことは明示的に書いてこなかったので、ここで書いておく。

命題 9.2. 加群 M の部分加群 M_1, M_2 が次の性質を同時に満たすとする。

(1) $M_1 + M_2 = M$.
(2) $M_1 \cap M_2 = 0$.

このとき、M は M_1 と M_2 の直和と同型である。(ある意味「逆」も成り立つ。乞研究)

さて、今回は、行列のジョルダンの標準形について PID 上の加群の理論の立場から概説しよう。つぎのような基本仮定を出発点とする。

基本仮定

k は体であるとし、ある正の整数 n について行列 $L \in M_n(k)$ が与えられているとする。このとき、一変数多項式環 $k[X]$ の $V = k^n$ への作用が

$$p(X).v = p(L)v$$

で定まる。 これにより、V を $k[X]$-加群と見よう。

$k[X]$ は PID であるから、一般論 (補題 9.1) により、次の命題が成り立つことがわかる。

命題 9.3. 基本仮定のもとで、V は $k[X]/(p(X)^e)$ ($p(X)$ は $k[X]$ の素元。e は正の整数) の形の $k[X]$-加群の直和である。

命題 9.4. $f(X) \in k[X]$ を

$$f(X) = c_d X^d + c_{d-1}X^{d-1} + c_{d-2}X^{d-2} + \cdots + c_1 X + c_0$$

と書こう。$g(X) \in k[X]$ の $k[X]/(f(X))$ におけるクラスを $[g]_f$ と書くことにする。このとき、

(1) $k[X]/(f(X))$ の基底として、

$$\{b_l = [X^l]_f; \qquad (l = 0, 1, 2, \dots, d-1)\}$$

が取れる。

(2) 上の基底を用いると X の作用は

$$X.b_l = \begin{cases} b_{l+1} & (0 \le l < d-1 \text{ のとき}) \\ -(c_{d-1}b_{d-1} + c_{d-2}b_{d-2} + \cdots + c_1 b_1 + c_0 b_0) & (l = d-1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と書き下せる。

例 9.5. $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ の基底として $b_0 = [1]_{X^2+1}, b_1 = [X]_{X^2+1}$ が取れる。X のこの基底への作用は、

$$X.b_0 = b_1$$
$$X.b_1 = -b_0$$

で与えられる。行列で表現すれば、

$$\begin{pmatrix} X.b_0 & X.b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

という具合である。

定義 9.6. 体 k が**代数的閉体**であるとは、k 上の任意の (次数が 1 以上の) 一変数多項式 $p(X)$ が一次式の積に分解するときに言う。

複素数体 $\mathbb{C}$ は代数的閉体であることが知られている。任意の体 k に対して、それを含むような最小の代数的閉体 $\bar{k}$ が存在することが知られている。このような $\bar{k}$ のことを k の**代数的閉包**と呼ぶ。

以下、k が代数的閉体のときを主に考える。このときには k 上の一変数既約多項式は一次式に限るから、次のことがわかる。

命題 9.7. 基本仮定のもとで、さらに k が代数的閉体であるとき、V は $k[X]/((X-c)^e)$ $(c \in k,\ e \in \mathbb{Z}_{>0})$ の形の $k[X]$-加群と同型である。

命題 9.4 のような基底を取れば、$k[X]/(X-c)^e$ 上の X の作用の表現を得ることができるが、c だけずらすことによって、さらに良い基底を取ることもできる。

命題 9.8. (1) $k[X]/((X-c)^e)$ の基底として、

$$\{b_l = [(X-c)^l]_f; \qquad (l = 0, 1, 2, \dots, e-1)\}$$

が取れる。

(2) 上の基底を用いると X の作用は

$$X.b_l = \begin{cases} cb_l + b_{l+1} & (0 \le l < e-1 \text{ のとき}) \\ cb_l & (l = e-1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と書き下せる。行列で書くと

$$\begin{pmatrix} X.b_0 & X.b_1 & X.b_2 & \dots X.b_{e-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots b_{e-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & & & & \\ 1 & c & & & \\ & 1 & c & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & c \end{pmatrix}.$$

もしくは、基底の順番を取り換えて、

$$\begin{pmatrix} X.b_{e-1} & X.b_{e-2} & X.b_{e-3} & \dots X.b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{e-1} & b_{e-2} & b_{e-3} & \dots b_0 \end{pmatrix} J_e(c)$$

ただし $J_e(c)$ は**ジョルダン細胞**と呼ばれる次のような行列である。

$$J_e(c) = \begin{pmatrix} c & 1 & & & \\ & c & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & c & 1 \\ & & & & c \end{pmatrix}.$$

系 9.9. 代数的閉体 k 上の行列 $L \in M_n(k)$ が与えられたとき、うまい基底変換行列 $P \in \mathrm{GL}_n(k)$ をとれば、

$$PLP^{-1} = \begin{pmatrix} J_{e_1}(c_1) & & & & \\ & J_{e_2}(c_2) & & & \\ & & J_{e_2}(c_2) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_{e_s}(c_s) \end{pmatrix}$$

とジョルダン細胞の「直和」に分解される。

問題 9.1. $n = 2$ で、

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

のとき、基本仮定のようにして $V = \mathbb{C}^2$ を $\mathbb{C}[X]$ 加群と見よう。このとき、V は $k[X]$ 上 $e_1 = {}^t(1\ 1)$ で生成されることを示しなさい。