代数学 II 要約 NO.6

第 6 回目の主題：$\boxed{\text{PID 上の有限生成加群}}$

定義 6.1. 環 A 上の加群 M の元 $m_1, m_2, \ldots, m_k$ に対して、 A-準同型

$$\varphi : A^{\oplus k} \ni \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} \mapsto \sum_{j=1}^{k} a_j.m_j$$

の核 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ の元のことを $m_1, m_2, \ldots, m_k$ の**関係式**と呼び、その全体のなす加群 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ のことを $m_1, m_2, \ldots, m_k$ の**関係式のなす加群**と呼ぶ。

以下では、次のような変換を考える。

(変換 1) $\{m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k\}$ の順序を入れ換える。

(変換 2) $\{m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k\}$ の代わりにそれを $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(A)$ で「ひねった」

$$\{a.m_1 + b.m_2, c.m_1 + d.m_2, m_3, \ldots, m_k\}$$

を考える。

(変換 3) $\{m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k\}$ の代わりに m_1 を

$$m_1' = m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3 + \cdots + a_k m_k$$

に置き換えたもの $\{m_1', m_2, m_3, \ldots, m_k\}$ を考える。

(変換 3) は (変換 1), (変換 2) を有限回組み合わせて得られることがわかるので以下の議論で必須ではない。

定義 6.2 (この講義だけで通じる記号)**.** 可換 PID A と、その上の加群 M が与えられていて、M は A 上 $m_1, m_2, \ldots, m_k$ で生成されているとする。$m_1, m_2, \ldots, m_k$ を (変換 1), (変換 2), (変換 3) を有限回繰り返して得られる M の元の組 $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ の全体を $\mathcal{S}_M$ と書くことにする。

補題 6.3. (変換 1),(変換 2),(変換 3) の形の変換は (同じ形の) 逆変換をもつ。とくに、$\mathcal{S}_M$ の各元 $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ にたいして、$\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ も M を生成する。

補題 6.4. $\underline{x} = \{x_j\} \in \mathcal{S}_M$ が、関係式

$$\sum_j a_j x_j = 0$$

を満たしたとする。

$$d = \gcd(a_1, a_2, \ldots, a_k)$$

とおいて、

$$a_j = d a_j' \qquad (a_j \in A, j = 1, 2, \ldots k)$$

と書こう。このとき、

$$y_1 = \sum_j a_j' x_j$$

を最初の元として持つような $\mathcal{S}$ の元 $y_1, y_2, \ldots, y_k$ が存在する。この y_1 は $d \cdot y_1 = 0$ を満たすことにも注意しよう。

補題 6.5. $\underline{x} \in \mathcal{S}_M$ と、その関係式 $(a_1, \dots, a_k)$ を全て考える。これらの全ての組み合わせについて、 $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_k)$ を考えた時、それらの中で (整除に関して) 極小なものが存在する。 その一つを以下 d_0 と書こう。このとき、

(1) $d_0 = 0$ なら M は自由加群である。以下、$d_0 \neq 0$ とする。
(2) ある $(u_1, u_2, \dots, u_k) \in \mathcal{S}_M$ が存在して、

$$d_0 \cdot u_1 = 0$$

なる関係式が成立する。
(3) $\underline{u}$ の任意の関係式 $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k)$ について、その各成分 $a_1, a_2, \dots, a_k$ は各々 d_0 で割り切れる。
(4) M は Au_1 と $Au_2 + \dots + Au_k$ の直和と同型である。

定理 6.6. 可換 PID A 上の有限生成加群 M が与えられているとする。このとき、M の生成系 $\underline{m} = \{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ にたいして、$\underline{m}$ を (変換 1),(変換 2),(変換 3) を有限回繰り返すことにより、M の新しい生成系 $\underline{w}$ であって、

$$M \cong Aw_1 \oplus Aw_2 \oplus \dots Aw_k$$

(巡回加群の直和) となるものが存在する。

一つの元で生成される加群を**巡回加群**と呼ぶのでした。

補題 6.7. 任意の環 A に対して、次のことが言える。

(1) 任意の A の左イデアル J にたいして、 A/J は巡回加群である。
(2) 任意の巡回加群は (1) で述べたようなものと同型である。

命題 6.8. (定理の言い換え) 可換 PID A 上の任意の有限生成加群 M は巡回 A 加群の直和に同型である。ゆえに、ある $c_1, c_2, \dots, c_k \in A^k$ と

$$M \cong A/Ac_1 \oplus A/Ac_2 \oplus \dots \oplus A/Ac_k$$

なる同型が存在する。

(ただの) 加群は $\mathbb{Z}$-加群のことと同じであって、$\mathbb{Z}$ は PID であることから、つぎの (大変有用かつ重要な) 系が成り立つ。

系 6.9 (有限生成アーベル群の基本定理)**.** 任意の有限生成アーベル群は巡回群の有限個の直和である。

命題 6.10. 可換 PID A のイデアルの増加列

$$I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset I_4 \subset \dots$$

は必ず有限で止まる。すなわち、ある N があって、

$$I_N = I_{N+1} = I_{N+2} = \dots$$

が成り立つ。