# 論理と集合要約 NO. 真 8

写像を理解するときに、「ホテルヒルベルト」のような解釈もできるのでした。
この解釈では、全射は、「空き室がないこと」に対応し、単射は、「各部屋個室」(単射でないことは、相部屋が生じること) に対応するのでした。
全射や単射の存在は、始集合と終集合の元の多さと関係しているのでした。

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

第 8 回目の主題：$\boxed{\text{写像}}$

◎写像の合成

**定義 真 8.1.** 写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ が与えられているとする。このとき、$f, g$ の**合成写像** $g \circ f : X \to Z$ を

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

で定義する。

次の命題は簡単ではあるが有用である。実用上はこのような命題があることだけ記憶しておいて、その都度頭の中で確かめるのがいいだろう。

**命題 真 8.2.** 写像 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ が与えられているとする。このとき、次がなりたつ。

(1) $f, g$ がともに単射ならば $g \circ f$ も単射である。
(2) $f, g$ がともに全射ならば $g \circ f$ も全射である。
(3) $f, g$ がともに全単射ならば $g \circ f$ も全単射である。
(4) $g \circ f$ が単射ならば、 $f$ は単射である。
(5) $g \circ f$ が全射ならば、 $g$ は全射である。

**定義 真 8.3.** 集合 $X$ に対して、写像 $X \ni x \mapsto x \in X$ を $X$ の**恒等写像**といい、$\mathrm{id}_X$ で表す。

**命題 真 8.4.** 集合 $X, Y$ と、写像 $f : X \to Y$ および $g : Y \to X$ が与えられているとする。このとき次のことはすべて同値である。

(1) $f$ は全単射であって、$g$ は $f$ の逆写像である。
(2) $g \circ f = \mathrm{id}_X$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.
(3) $f$ は全射であって、$g \circ f = \mathrm{id}_X$.
(4) $f$ は単射であって、$f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

上の命題も、(1)$\Leftrightarrow$(2) 以外はその都度確認すれば良い。(1)$\Leftrightarrow$(2) は特に重要である。

**問題 真 8.1.** $X = \mathbb{R}_{\geq 0}, Y = \mathbb{R}$ とおく。写像 $f : X \ni x \to \sqrt{x} \in Y$ と $g : Y \ni x \to x^2 \in X$ にたいして、

(1) $g \circ f = \mathrm{id}_X$ であることを示しなさい。
(2) $f \circ g \neq \mathrm{id}_Y$ であることを示しなさい。
(3) $f$, $g$ はそれぞれ全射、単射、全単射だろうか。

**問題 真 8.2.** $X = \mathbb{C}[t]$ (複素数係数の $t$ を変数とする多項式の全体のなす集合), $Y = \mathbb{C}[t]$ とおく。写像 $f : X \ni p \to \int_0^t p dt \in Y$ と $g : Y \ni p \mapsto \frac{d}{dt} p \in X$ にたいして、

(1) $g \circ f = \mathrm{id}_X$ であることを示しなさい。
(2) $f \circ g \neq \mathrm{id}_Y$ であることを示しなさい。
(3) $f$, $g$ はそれぞれ全射、単射、全単射だろうか。