論理と集合要約 NO.6

第 6 回目の主題：$\boxed{\text{集合の演算の例}}$
集合を扱う際は個々の元を取り出し、諸性質を論理で証明する。
例えば、$A = 6\mathbb{Z}$, $B = 2\mathbb{Z}$ にたいして、$A \subset B$ を示すには、

(1) A の各元 x について、
(2) $x = 6n = 2(3n)$ であることを示し、
(3) $x = 2(3n) \in B$ と結論する。

というステップを踏むのだった。
同様に、$A_2 = \{x \in \mathbb{R} | x > 20\}$, $B_2 = \{x \in \mathbb{R} | x^4 - 7x - 9 > 0\}$ に対して、$A_2 \subset B_2$ を示すには、

(1) A_2 の各元 x について、
(2)
$$x^4 - 7x - 9 \geq x^4 - 10x^3 - 10x^3 \geq x^3(x - 20) > 0$$
であることを示し、
(3) $x \in B_2$ と結論する。

と良い。

問題 6.1. 実係数の多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ が、$a_n > 0$ を満たすとする。$M = \frac{n}{a_n}\max\{|a_n|, |a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \ldots, |a_0|\}$ とおくと、
$$\{x \in \mathbb{R} | x > M\} \subset \{x \in \mathbb{R} | f(x) > 0\}$$
が成り立つことを示しなさい。

集合の一般論でも同様。

問題 6.2. 集合 A, B, C, D に対して、
$$(A \subset C \text{ and } B \subset D) \implies A \cup B \subset C \cup D$$
を示しなさい。

問題 6.3. 集合 X, Y, Z に対して、$X \subset Y \implies Z \setminus X \supset Z \setminus Y$ を示しなさい。

問題 6.4. 集合族 $\{A_i\}, \{B_i\}$ が与えられた時、包含関係
$$(\cup A_i) \setminus (\cup B_i) \subset \cup(A_i \setminus B_i)$$
および
$$(\cap A_i) \setminus (\cap B_i) \supset \cap(A_i \setminus B_i)$$
を示しなさい、

....

$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ にたいし、そのノルムを
$$||v|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$
で定義する。このとき、$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ にたいして、
$$||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$$
がなりたつ。(三角不等式。)

一般に、$a \in \mathbb{R}^n$ と $r > 0$ に対して、

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x-a|| < r\}$$
$$\bar{B}_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x-a|| \leq r\}$$

とおく。

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 U は

$$\forall x \in U \exists r \in \mathbb{R}_{>0} \quad B_r(x) \subset U$$

を満たすとき、(通常位相に関して) **開集合**であると呼ばれる。開集合とは、「境界を含まない集合」ということの数学的な表現である。

開集合というものをベースにして、「遠い」「近い」「つながっている」などの概念を数学的に取り扱えるようにしたものが位相空間論である。位相空間論は現代数学において大変重要な位置を占めていて、進んで数学を学びたい人は、例えば微分積分学の学習と並行して学習してみるのもオススメである。

「境界」という言葉自体も数学的に表現できるが、ここではそこまでは踏み込まないことにする。

問題 6.5. $\mathbb{R}^n$ の開球 $B_1(0)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを示しなさい。

問題 6.6. $\mathbb{R}^n$ の閉球 $\bar{B}_1(0)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合ではないことを示しなさい。

問題 6.7. $\{(x,0); x \in \mathbb{R}\}$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合ではないことを示しなさい。

問題 6.8. 任意の $a, b \in \mathbb{R}^n$ と任意の正の数 r_1, r_2 にたいして、$B_{r_1}(a) \cap B_{r_2}(b)$ は開集合であることを示しなさい。

問題 6.9.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{1+1/n}(0) = \bar{B}_1(0)$$

であることを示しなさい。

一般に、開集合の 2 つの共通部分は開集合だが、無限個の共通部分は開集合とは限らない。

問題 6.10. $\mathbb{R}^n$ の開集合であることは、開球の和集合であることと同値であることを示しなさい。