代数学 IA NO.1 要約

一学期の目標

$\boxed{\text{群の準同型定理を理解する。}}$

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ 代数系, 特に, 群。

代数系とは、集合の上に演算を載せたものである。

載せる演算の種類によっていろいろなものができる。

演算	演算の記号	代数系
和, 差	$+, -$	加群
積	$\times$	半群
積, 商	$\times, \bullet^{-1}$	群
和, 差, 積	$+, -, \times$	環
和, 差, 積,0 以外での商	$+, -, \times, \bullet^{-1}$	体

定義 1.1 (群の定義)**.** 集合 G が群であるとは、

(群 0)「演算」と呼ばれる写像 $G \times G \ni (x, y) \mapsto x \circ y \in G$ が定義されていて、

次の条件を満たすときに言う。

(群 1) その演算は結合法則を満たす。

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \quad (\forall x, y, z \in G)$$

(群 2) G には単位元 (普通 e と書かれる) が存在する。すなわち、ある G の元 e があって、

$$e \circ x = x, \quad x \circ e = x \quad (\forall x \in G)$$

がなり立つ。

(群 3) G の各元には逆元がある。すなわち、G の任意の元 x に対して、G のある元 y が存在して、

$$x \circ y = e, \quad y \circ x = e$$

がなりたつ。

群の定義において、集合 G を決めただけではどんな演算を考えているのか明確でないので、正確には、組 $(G, \circ)$ を群と呼ぶ。

例 1.2. *次の G はそれぞれ通常の乗法を演算とする群である。*

(1) $G = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. (これを $\mathbb{Q}$ の 乗法群 $(\mathbb{Q}^\times, \times)$ と呼ぶ。)

(2) $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

例 1.3. *次の $(G, \circ)$ はそれぞれ乗法を演算とする群 <u>でない</u>。*

(1) $G = \mathbb{Z}$, $x \circ y = xy$.

(2) $G = \mathbb{Q}$, $x \circ y = xy$.

定義 1.4. 演算が可換で、かつ $+$ 記号で書かれるような群のことを加法群と呼ぶ。加法群は加群とも呼ばれる。

例 1.5. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ 等はそれぞれ (通常の加法に関して) 加法群である。$2\mathbb{Z}$ も加法群である。

加法群も群の一種に過ぎないことに注意。$\mathbb{Z}$ の加法群のことを $(\mathbb{Z}, +)$ と書く。

例 1.6. $\{-1, 0, 1\}$ は (通常の加法に関して) 群ではない。

問題

(I) $\mathbb{Z} \setminus \{-100\}$ は加法に関して群をなすだろうか、理由を挙げて述べなさい。

(II) $\mathbb{Z}$ に、演算 $\circ$ を

$$x \circ y = x + y + 3$$

で定義する。このとき、$(\mathbb{Z}, \circ)$ は群であるか、理由をつけて答えなさい。

● http://www.math.kochi-u.ac.jp/docky/kogi にこのプリントを提供する.