微分積分学概論 AI 要約 NO.2

第 2 回目の主題：$\boxed{\text{実数の公理・数列の収束の定義}}$

「$\forall x$....」は、「どんな x に対しても、 .... がなりたつ」という意味、

「$\exists x$....」は、「なにかある一つの x に対しては、 .... がなりたつ」という意味で用いる。

以下では実数 $\mathbb{R}$ は次の性質を持つことを認めることにする。

公理 2.1. $\mathbb{R}$ の上に有界な部分集合は必ず上限を持つ。

実数の諸性質は、上の公理と四則演算、大小関係の公理に基づきすべて証明される。例えば、つぎのことが証明できる。

命題 2.2 (アルキメデスの原理)**.** $\mathbb{N}$ は上に有界ではない。

命題 2.3 (有理数の稠密性)**.** 任意の異なる 2 つの実数の間には有理数が存在する。

正の整数の全体のことをこの講義では $\mathbb{Z}_{>0}$ と書く。数列とは、数学的には次のように定義できる。

定義 2.4. 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ とは、 $\mathbb{Z}_{>0}$ から $\mathbb{R}$ への写像 $n \mapsto a_n$ (すなわち、正の整数 n に実数 a_n を対応させる対応) のことである。

定義 2.5. 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 c に**収束する**とは、

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \text{ such that } \quad (\forall n > N \quad |a_n - a| < \epsilon)$$

がなりたつときに言う。

この定義が使いこなせるようになれば、この講義の目標の 80% は達せられたと言って良い。

例題 2.6. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ が } 10 \text{ の倍数のとき} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

で定義するとき、 $\{a_n\}$ は何かある値に収束するだろうか。定義に基づいて理由を述べて答えなさい。

解答 . $\{a_n\}$ はどの値にも収束しない。

(証明) 背理法で、$\{a_n\}$ がある数 c に収束したとする。収束の定義の ϵ として $\frac{1}{2}$ を採用しよう。ある N_0 が存在して、

$$(※) \qquad n > N_0 \text{ならばいつでも } |a_n - c| < \frac{1}{2}$$

が成り立つはずである。そこで

(sample i) 上の n として N_0 より大なる 10 の倍数、たとえば、$n = 10N_0$ をとると、

$$|1 - c| < \frac{1}{2}$$

がわかり、

(sample ii) 上の n として N_0 より大なる数で、 10 の倍数でないもの、たとえば、$n = 10N_0 + 1$ をとると、

$$|0 - c| < \frac{1}{2}$$

上の (sample i,ii) をあわせると、

$$1 = |1-0| \leq |1-c| + |c-0| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

となって矛盾である。

よって、$\{a_n\}$ はいかなる値にも収束しない。

例題 2.7. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \begin{cases} 1/n & n \text{ が } 10 \text{ の倍数のとき} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

で定義するとき、 a_n は何かある値に収束するだろうか。定義に基づいて理由を述べて答えなさい。

解答 . $\{a_n\}$ は 0 に収束する

(証明) 与えられた $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ にたいして、N_0 として、$1/\epsilon$ より大きい整数を一つとっておく。(そのようなもの (すなわち与えられた実数よりも大きな整数) が存在することは、「アルキメデスの原理」として保証されているが、マアさしあたっては当り前だと思っても良い。)

この N_0 が収束の定義の N の役割を果たすことを示そう。実際、$n > N_0$ なる任意の n にたいして、

(case i) n が 10 の倍数なら、

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N_0} < \epsilon$$

(case ii) n が 10 の倍数でないなら、

$$|a_n - 0| = 0 < \epsilon$$

となって、いずれの場合にせよ $|a_n - 0| < \epsilon$ が成り立つからである。

問題 2.1. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2}$$

で定義するとき、$\{a_n\}$ は何かある値に収束するだろうか。定義に基づいて理由を述べて答えなさい。