

微分積分学概論 AI 要約 NO.1

本講義の目的：**極限と連続性の詳論**

高校までの数学が「料理を味わう勉強」とするなら、この講義での数学は「料理を作る勉強」である。とは言っても、「野菜を畑で作る」ところから始めると大変なので、ある程度は出来合いのものもちいる。他方で、「レトルトを温めておしまい」では料理とはよべない。おなじように、高校で習った「中間値の定理」などの定理をここで手ばなしで使ってはいけない。指数関数、対数関数、三角関数等もアウトである。ではどこまで用いて良いかといえば次のようになる。

◎この講義で用いて良いもの(材料):
整数、有理数、実数の、和、差、積、商、等号、不等号。
◎この講義で作るもの(料理):
極限、収束、連続の諸概念。中間値の定理などの連続関数に関する諸定理。

定義 1.1. 以下この講義では次のような記号を用いる。

- (1) \mathbb{Z} : 整数全体のなす集合。
- (2) \mathbb{Q} : 有理数全体のなす集合。
- (3) \mathbb{R} : 実数全体のなす集合。
- (4) \mathbb{C} : 複素数全体のなす集合。

◎集合と、その元との区別が大事。「実数の集合を一つ考える。」というのと、「実数を一つ考える。」というのをよく意識して区別すること。

定理 1.2. 次の不等式が成り立つ。

- (1) $x \in \mathbb{R}$ に対して、 $-|x| \leq x \leq |x|$ 。
- (2) (**三角不等式**) $x, y \in \mathbb{R}$ に対して、 $|x + y| \leq |x| + |y|$ 。

定義 1.3. 実数 a, b について、閉区間 $[a, b]$ と开区間 (a, b) をつぎの式で定める。

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

実数の集合の例、上限、上界

◎ $[a, b]$ には端点があって、そこでのようすは $[a, b]$ のほかの点のようすと大きく異っている。それに対して、 (a, b) の各点はどの点も似ている。

◎ $[a, b]$ には最大元があるが、 (a, b) にはない。次の定義を見よ。

定義 1.4. \mathbb{R} の部分集合 A が与えられているとする。このとき

- (1) $a \in \mathbb{R}$ が A の**上界** (upper bound) であるとは、

$$\forall x \in A (x \leq a)$$

(つまり、どの $x \in A$ をもってきてても $x \leq a$) が成り立つときに言う。

- (2) $a \in \mathbb{R}$ が A の**上限** (supremum) であるとは、 A の上界のうち最小のものをいう。

◎ 集合の上界は存在するとは限らない。また、上界が存在したとすると、それはいくつもある。

例 1.5.

$$T = \{ \text{土佐電鉄(*)の運賃} \} = \{120, 200, 220, 300, 400, 460\}$$

とおく ((*)2014/4/1 現在)。このとき、

- (1) T の上界としては、1000 がある。これは「土佐電鉄に乗るときは 1000 円あればひとり分のお金は足りる」ことを意味している。
- (2) T の上界としては、他にも 500, 一万、十万、951.777.. 等がある。
- (3) T の上限は 500 である。

旅行に行くとき、かかる旅費をキッチリ計算して、その分のお金しか持って行かない人は少なからう。「大体△万円あれば十分」とか見積もる。これが上界の考え方。

例 1.6. (最大値を持たないが上限を持つ集合たち)

- (1) $\{\frac{n-1}{n}; n = 1, 2, 3, \dots\}$ は上限 1 をもつ。
- (2) $\{x \in \mathbb{R}; x < 2\}$ は上限 2 を持つ。
- (3) $\{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 2\}$ は上限 $\sqrt{2}$ を持つ。

定義 1.7. 集合 $A \subset \mathbb{R}$ が上に有界であるとは、 A が上界を少なくとも一つもつときに言う。

例題 1.8. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$ とおく。このとき

$$S = \{x \in \mathbb{R}; f(x) < 0\}$$

は上界をもつだろうか、

(解答) $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ と因数分解できるので、

$$S = (0, 1) \cup (2, 3)$$

であることがわかる。したがって、 S は上界 10 をもち、上に有界である。

上界は一つ挙げれば十分である。上の例題なら 3 (上限) でも良いし、100 でもよい。 f が因数分解できない場合も、つぎのような別解ならうまくいく。

(別解) まず、 $M = 100$ とおくと、 S の元 s は $s \leq M$ を満たす。なぜなら、もし $s > M$ なる $s \in S$ が存在したとすると、

$$\begin{aligned} f(s) &= s^4 - 6s^3 + 11s^2 - 6s \\ &> 100s^3 - 6s^3 + 11 \cdot 0 - 6 \cdot s^3 = 88s^3 > 0 \end{aligned}$$

となって、これは $s \in S$ に反するからである。($s > 1$ のとき $s < s^2 < s^3 < \dots$ に注意。負の項は多めに見積もり、正の項は控えめに見積もる。) したがって、 M は S の上界の一つである。

問題 1.1. 次の各問に答えなさい。

- (1) $\{|x^3 - 10x^2 + 100x - 1000| ; x \in [0, 1]\}$ の上界を一つ挙げ、その理由を述べなさい。

(2)

$$S = \{x \in \mathbb{R}; 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 5 < 0\}$$

は上界をもつだろうか、もつ場合には上界を一つ挙げてその理由を説明し、もたない場合にはもたないことの原因を説明せよ。

次のことは、実数の極限を考える上で基本的である。

公理 1.9. \mathbb{R} の部分集合 $S \neq \emptyset$ が上に有界ならば S は必ず上限をもつ。