

## 代数学演習 IB 問題 NO.6

### 環の準同型定理編

**問題 6.1** (全部で1点).  $\mathbb{R}$  から  $\mathbb{R}$  への次の写像はいずれも環準同型でないことを示しなさい。

- (1)  $f_1(x) = (x + 1)/2$
- (2)  $f_2(x) = x^2$
- (3)  $f_3(x) = 2x - 1$
- (4)  $f_4(x) = x^3 + x^2 - x$

**問題 6.2.** (全部で1)  $\mathbb{Z}$  から  $\mathbb{Z}$  への環準同型  $\varphi$  があったとする。

- (1)  $\varphi(2), \varphi(3)$  を求めよ。
- (2) 任意の  $k \in \mathbb{Z}_{>0}$  にたいして、 $\varphi(k) = k$  であることを示しなさい。
- (3)  $\varphi(k) = k \quad (\forall k \in \mathbb{Z})$  を示しなさい。

**問題 6.3.** (全部で1)  $\mathbb{Z}[X]$  から  $\mathbb{Z}$  への環準同型  $\varphi$  で、 $\varphi(X) = 3$  をみたすものがあったとする。

- (1)  $\varphi(k) = k \quad (\forall k \in \mathbb{Z})$  を示しなさい。
- (2)  $\varphi(5X), \varphi(X^3)$  をそれぞれもとめなさい。
- (3)  $\varphi(X^3 + 5X + 7)$  をもとめなさい。
- (4)  $p(X) = \sum_j a_j X^j$  にたいして、 $\varphi(p)$  をもとめなさい。

**問題 6.4.**  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  から  $\mathbb{Z}$  への環準同型は存在するだろうか。存在する場合には全て挙げ、存在しない場合はその理由をのべよ。

**問題 6.5.**  $\mathbb{Q}$  から  $\mathbb{Z}$  への環準同型は存在するだろうか。存在する場合には全て挙げ、存在しない場合はその理由をのべよ。

**問題 6.6.**  $\mathbb{Q}$  から  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  への環準同型は存在するだろうか。存在する場合には全て挙げ、存在しない場合はその理由をのべよ。

**問題 6.7.**  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  から  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  への環準同型は存在するだろうか。存在する場合には全て挙げ、存在しない場合はその理由をのべよ。

**問題 6.8.** (各1点)  $\mathbb{R}$  から  $\mathbb{R}$  への環準同型  $f$  が与えられているとするとき、

- (1)  $f(\mathbb{R}_{\geq 0}) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$  であることを示しなさい。
- (2)  $x, y \in \mathbb{R}, x \leq y$  ならば  $f(x) \leq f(y)$  であることを示しなさい。
- (3)  $f$  は連続であることを示しなさい。
- (4)  $f = \text{id}$  (恒等写像) であることを示しなさい。

**問題 6.9.**  $\mathbb{C}$  から  $\mathbb{C}$  への準同型写像の例を二つ(以上)挙げなさい。(二つはかなり簡単に見つかるが、三つめを挙げるのは超難問である。それゆえ二つ答えるのが無難である。)

以下この演習では、とくに断らないで  $[?]_n$  で?の  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  でのクラスを表すことがある。文脈でわかると思うので、いちいち書かないが、注意していただきたい。

**問題 6.10.**  $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$  から  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  への写像  $f$  を

$$f([x]_{20}) = [x]_5 \quad (x \in \mathbb{Z})$$

で定める。このとき、 $f$  はうまく定義されていて、環準同型であることを示しなさい。

問題 6.11.  $\mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$  から  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  への写像  $f$  を

$$f([x]_{31}) = [x]_7 \quad (x \in \mathbb{Z})$$

で定めたいが、 $f$  はうまく定義されていて、環準同型であるだろうか。理由をつけて答えなさい。

問題 6.12. 体  $K$  から環  $R$  への準同型写像は必ず単射であることを示しなさい。

問題 6.13. 環準同型写像  $f: \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \ni [x]_{18} \mapsto [x]_6 \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  を考える。一行目に  $x \in \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$  (18個), 二行目に  $f(x)$  が並んだような表を作り、 $\text{Ker}(f)$ ,  $f^{-1}([1]_6)$ ,  $f^{-1}([2]_6)$  をそれぞれ求めなさい。

問題 6.14. 環準同型写像  $f: \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \ni [x]_{20} \mapsto [x]_4 \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  を考える。一行目に  $x \in \mathbb{Z}/18\mathbb{Z}$  (18個), 二行目に  $f(x)$  が並んだような表を作り、 $\text{Ker}(f)$ ,  $f^{-1}([1]_6)$ ,  $f^{-1}([2]_6)$  をそれぞれ求めなさい。

問題 6.15. 行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$$

にたいして、

$$\varphi: \mathbb{C}[X] \rightarrow M_n(\mathbb{C})$$

を

$$\varphi(p) = p(A)$$

で定義する。このとき、

- (1)  $\varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3)$  を求めなさい。
- (2)  $\varphi(X^7 + X + 1)$  をもとめなさい。
- (3)  $\varphi$  は環準同型であることを示しなさい。
- (4)  $\text{Ker}(\varphi)$  を求めなさい。
- (5)

$$\text{Image}(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

であることを証明しなさい。