

微分積分学概論 AI 要約 NO.5

第5回目の主題：上限

次の公理は実数の基本的な性質である。

公理 5.1. (公理 4.7 の再掲) \mathbb{R} の部分集合 A が上に有界ならば、 A は上限を持つ。

定義 5.2. \mathbb{R} の部分集合 A に対して、その上限のことを $\sup(A)$ と書く。

補題 5.3. 集合 A の上限が α であることは、次の二条件が同時に成り立つことと同値である。

- (1) $\forall x \in A \quad (x \leq \alpha)$.
- (2) $\forall \epsilon > 0 \exists x \in A (x > \alpha - \epsilon)$.

数列 $\{a_n\}$ を単なる集合と見てそれが有界かどうか、やその上限 $\{a_n\}$ を議論することができる。公理 5.1 により、上に有界な数列は上限を持つことがわかる。

定義 5.4. 実数列 $\{a_n\}$ が単調増加であるとは、

$$\forall n \forall m (n \geq m \implies a_n \geq a_m)$$

がなりたつときにいう。

もっと露骨に言えば $\{a_n\}$ が単調増加であるとは

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq \dots$$

が成り立つということである。

補題 5.5. 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

で定義する。このとき

- (1) $\{a_n\}$ は単調増加である。
- (2) $\{a_n\}$ は有界である。

定義 5.6. 上限

$$\sup \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

のことを自然対数の底とよび、 e と書く。

定理 5.7. 上に有界な単調増加数列はその上限に収束する。

問題 5.1.

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2}$$

で定義される数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界であることを示しなさい。

ヒント: $k > 1$ に対して、

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

微分積分学概論 AI 要約 NO.5

A	α	alpha	アルファ	<p>ギリシャ文字の表。</p> <ul style="list-style-type: none"> • 左から順に、大文字、小文字、英語での読み、日本語での読み方を書いた。(ただし、「日本語での読み方」はだいたいの目安に過ぎない。) • A, B, E など、通常のアルファベットと同じに見える文字は、ふつうは数学では用いられない。 • 逆に、同じ読みでも二つ以上の文字がある場合、数学では二つを区別し、それぞれ別の意味で用いることがある。
B	β	beta	ベータ	
Γ	γ	gamma	ガンマ	
Δ	δ	delta	デルタ	
E	ϵ, ε	epsilon	イプシロン	
Z	ζ	zeta	ゼータ	
H	η	eta	エータ	
Θ	θ, ϑ	theta	シータ	
I	ι	iota	イオタ	
K	κ	kappa	カッパ	
Λ	λ	lambda	ラムダ	
M	μ	mu	ミュー	
N	ν	nu	ニュー	
Ξ	ξ	xi	グザイ	
O	o	omicron	オミクロン	
Π	π, ϖ	pi	パイ	
P	ρ, ϱ	rho	ロー	
Σ	σ, ς	sigma	シグマ	
T	τ	tau	タウ	
Υ	υ	upsilon	ウプシロン	
Φ	ϕ, φ	phi	ファイ	
X	χ	chi	カイ	
Ψ	ψ	psi	プサイ	
Ω	ω	omega	オメガ	