微分積分学概論 AI 要約 NO.4

実数の集合の例、上限、上界

定義 4.1. 実数 a, b について、閉区間 $[a, b]$ と開区間 (a, b) をつぎの式で定める。

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a \le x \le b\}$$
$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

◎ $[a, b]$ には端点があって、そこでのようすは $[a, b]$ のほかの点のようすと大きく異っている。それに対して、(a, b) の各点はどの点も似ている。

◎ $[a, b]$ には最大元があるが、(a, b) にはない。次の定義を見よ。

定義 4.2. $\mathbb{R}$ の部分集合 A が与えられているとする。 このとき

(1) $a \in \mathbb{R}$ が A の**上界** (upper bound) であるとは、
$$\forall x \in A (x \le a)$$
(つまり、どの $x \in A$ をもってきても $x \le a$) が成り立つときに言う。

(2) $a \in \mathbb{R}$ が A の**上限** (supremum) であるとは、A の上界のうち最小のものをいう。

◎ 集合の上界は存在するとは限らない。また、上界が存在したとすると、それはいくつもある。

例 4.3.
$$T = \{\text{ 土佐電鉄 (*) の運賃 }\} = \{120, 200, 220, 300, 400, 460\}$$
とおく ((*)2014/4/1 現在)。 このとき、

(1) T の上界としては、1000 がある。これは「土佐電鉄に乗るときは 1000 円あればひとり分のお金は足りる」ことを意味している。

(2) T の上界としては、他にも 500, 一万、十万、951.777.. 等がある。

(3) T の上限は 500 である。

旅行に行くとき、かかる旅費をキッチリ計算して、その分のお金しか持って行かない人は少なかろう。「大体△万円あれば十分」とか見積もる。これが上界の考え方。

例 4.4. (最大値を持たないが上限を持つ集合たち)

(1) $\{\frac{n-1}{n}; n = 1, 2, 3, \ldots\}$ は上限 1 をもつ。

(2) $\{x \in \mathbb{R}; x < 2\}$ は上限 2 を持つ。

(3) $\{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 2\}$ は上限 $\sqrt{2}$ を持つ。

定義 4.5. 集合 $A \subset \mathbb{R}$ が**上に有界**であるとは、A が上界を少なくとも一つもつときに言う。

例題 4.6. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$ とおく。このとき
$$S = \{x \in \mathbb{R}; f(x) < 0\}$$
は上界をもつだろうか、

(解答) $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ と因数分解できるので、
$$S = (0, 1) \cup (2, 3)$$
であることがわかる。したがって、 S は上界 10 をもち、上に有界である。

上界は一つ挙げれば十分である。上の例題なら 3 (上限) でも良いし、100 でもよい。f が因数分解できない場合も、つぎのような別解ならうまくいく。
(別解) まず、$M = 100$ とおくと、S の元 s は $s \le M$ を満たす。なぜなら、もし $s > M$ なる $s \in S$ が存在したとすると、

$$\begin{aligned} f(s) = \quad & s^4 - 6s^3 + 11s^2 - 6\ s \\ & > 100s^3 - 6s^3 + 11\cdot 0 - 6\cdot s^3 = 88s^3 > 0 \end{aligned}$$

となって、これは $s \in S$ に反するからである。($s > 1$ のとき $s < s^2 < s^3 < \dots$ に注意。負の項は多めに見積もり、正の項は控えめに見積もる。) したがって、M は S の上界の一つである。

問題 4.1. 次の各問に答えなさい。

(1) $\{|x^3 - 10x^2 + 100x - 1000| \quad ; \quad x \in [0, 1]\}$ の上界を一つ挙げ、その理由を述べなさい。

(2)
$$S = \{x \in \mathbb{R}; 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 5 < 0\}$$
は上界をもつだろうか、もつ場合には上界を一つ挙げてその理由を説明し、もたない場合にはもたないことの理由を説明せよ。

次のことは、実数の極限を考える上で基本的である。

公理 4.7. $\mathbb{R}$ の部分集合 $S \ne \emptyset$ が上に有界ならば S は必ず上限をもつ。

参考のために、$\mathbb{R}$ の性質で必要最小限のものを書いておこう。
よく知っている体 $\mathbb{R}$ から少し離れて、次のような集合 K (とその上の演算 $+, \times$, 元 $1_K, 0_K$, 関係式 $>, =, <$) を考える。

(1) K は体である。すなわち:
  (a) $(K, +)$ は加法群である。
    (i) K の各元 x, y に対して、その和と呼ばれる元 $x + y \in K$ がただひとつ定まる。
    (ii) $(x + y) + z = x + (y + z) \qquad (\forall x, \forall y, \forall z \in K)$.
    (iii) K にはゼロ元 0_K と呼ばれる元が存在して、任意の $x \in K$ に対して $x + 0_K = x, 0_K + x = x$ を満たす。
    (iv) K の各元 x に対して、そのマイナス元 $(-x)$ と呼ばれる元が存在して、 $x + (-x) = 0_K, (-x) + x = 0_K$ を満たす。
    (v) $x + y = y + x$.
  (b) $(K, \times)$ は乗法に関して半群をなす。すなわち、
    (i) K の各元 x, y に対して、その積と呼ばれる元 $xy \in K$ がただひとつ定まる。
    (ii) $x(yz) = (xy)z \qquad (\forall x, \forall y, \forall z \in K)$.
  (c) 分配法則。$(x+y)z = xz+yz, z(x+y) = zx+zy \qquad (\forall x, \forall y, \forall z \in K)$.
  (d) K は乗法に関する単位元 1_K をもつ。すなわち、任意の $x \in K$ に対して $x1_K = x, 1_K x = x$ を満たす。
  (e) K の乗法は可換である。 $xy = yx \quad (\forall x, \forall y \in K)$.
  (f) K の 0_K 以外の元 x は乗法に関して逆元 x^{-1} と呼ばれる元が存在して、 $x^{-1}x = 1_K, xx^{-1} = 1_K$ を満たす。
(2) K は全順序集合である。
  (a) $x, y \in K$ に対して、 $x > y$ か $x = y$ か $x < y$ のいずれかが成り立つ。
  (b) $x, y, z \in K$ にたいして、「$(x > y$ and $y > z)$ ならば $x > z$」が成り立つ。
(3) K の体の構造と順序構造は両立する。
  (a) $x > y \implies x + z > y + z$.
  (b) $x > 0, y > 0 \implies xy > 0$.
(4) K の任意の有界部分集合は K 内に上限を持つ。

このとき、K は実数体 $\mathbb{R}$ と「同じ」(順序体として同型) である。
群、加法群、体について、その詳しい性質は 2 年生からの代数学で深く勉強する。