微分積分学概論 AI 要約 NO.1

本講義の目的：$\boxed{\text{極限と連続性の詳論}}$

高校までの数学が「料理を味わう勉強」とするなら、この講義での数学は「料理を作る勉強」である。とは言っても、「野菜を畑で作る」ところから始めると大変なので、ある程度は出来合いのものをもちいる。他方で、「レトルトを温めておしまい」では料理とはよべない。おなじように、高校で習った「中間値の定理」などの定理をここで手ばなしで使ってはいけない。指数関数、対数関数、三角関数等もアウトである。ではどこまで用いいて良いかといえば次のようになる。

> ◎この講義で用いて良いもの (材料):
> 整数、有理数、実数の、和、差、積、商、等号、不等号。
> ◎この講義で作るもの (料理):
> 極限、収束、連続の諸概念。中間値の定理などの連続関数に関する諸定理。

第一回目の主題：$\boxed{\text{数学の表記法}}$

この半年の講義は「無限」をどう扱うかが焦点であると言っても良い。「無限」を効率よく扱うためには、「集合」をうまく使うことが大事である。

定義 1.1. 以下この講義では次のような記号を用いる。

(1) $\mathbb{Z}$: 整数全体のなす集合。
(2) $\mathbb{Q}$: 有理数全体のなす集合。
(3) $\mathbb{R}$: 実数全体のなす集合。
(4) $\mathbb{C}$: 複素数全体のなす集合。

◎集合と、その元との区別が大事。「実数の集合を一つ考える。」というのと、「実数を一つ考える。」というのをよく意識して区別すること。

1.1. 実数の集合の例.

定義 1.2. 実数 a, b について、閉区間 $[a, b]$ と開区間 (a, b) をつぎの式で定める。

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

◎ $[a, b]$ には端点があって、そこでのようすは $[a, b]$ のほかの点のようすと大きく異っている。それに対して、(a, b) の各点はどの点も似ている。

◎ $[a, b]$ には最大元があるが、(a, b) にはない。~~次の定義を見よ。~~

定義 1.3. 実数 x に対して、その絶対値 $|x|$ を次のように定義する。

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

(ただし平方根は 0 以上のほうを選ぶ。)

上の平方根を使う定義は次のように高次元の空間にも容易に拡張できるという長所を持つ。(ただし、「平方根」を用いるのはしばらくは禁じ手であったのでこれらの平方根を用いた方の定義は平方根の定義を正しく与えるまでは「保留」という事になる。)

$$||(x_1, x_2, \ldots, x_n)|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2}$$

次に出てくる三角不等式も実は高次元の場合にも成り立ち、解析学の基本的な道具として大切である。

定理 1.4. 次の不等式が成り立つ。

(1) $x \in \mathbb{R}$ に対して、 $-|x| \leq x \leq |x|$.
(2) (三角不等式) $x, y \in \mathbb{R}$ に対して、$|x+y| \leq |x| + |y|$.

○収束の定義 (ϵ-N-論法)

定義 1.5. 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が a に収束するとは、

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \text{ such that } \quad (\forall n > N \quad |a_n - a| < \epsilon)$$

のときにいう。

問題 1.1. 次のうち、正しいものには証明を、間違っているものには反例を述べよ。

(1) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad \text{such that} (\epsilon > \delta)$.
(2) $\exists \delta > 0$ such that $\forall \epsilon > 0 (\epsilon > \delta)$.
(3) $\exists \delta \in \mathbb{Z}_{>0} \forall \epsilon \in \mathbb{Z}_{>0}$ such that $(\epsilon \geq \delta)$.