論理と集合要約 NO.14

第 14 回目の主題：$\boxed{\text{写像は定義域の元を類別する。}}$

定義 14.1. 集合 X の部分集合の族 $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が X の**クラス分け** (**分割**とも言う) であるとは、つぎのことが成り立つときに言う。

(1) $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda = X.$

(2) $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば $C_{\lambda_1} \cap C_{\lambda_2} = \emptyset.$

定義 14.2. X の 2 つの元 x, y にたいして、$x \sim y$ か、そうでない ($x \not\sim y$) かがきちんと定まっていて、次の性質を持つとき、$\sim$ のことを X 上の**同値関係**という。

(1) $\forall x \in X \forall y \in X \forall z \in X$ (「$x \sim y$ and $y \sim z$」 $\Longrightarrow$ $x \sim z$).

(2) $\forall x \in X$ ($x \sim x$).

(3) $\forall x \in X \forall y \in X$ ($x \sim y \Longrightarrow y \sim x$).

命題 14.3. X に同値関係 $\sim$ が定まっているとする。このとき、$x \sim y$ か否かによって、x と y が同じクラスか否かを定めることで X のクラス分けが定義される。

◎写像になる、ならない

問題 14.1. X =(三角形全体の集合) とする。

(1) X から $\mathbb{R}$ への写像 f_1 を、$f_1(\Delta) = (\Delta$ の一つの辺の長さ) で決めようと思う。f_1 は写像だろうか。

(2) X から $\mathbb{R}$ への写像 f_2 を、$f_2(\Delta) = (\Delta$ の最短の辺の長さ) で決めようと思う。f_2 は写像だろうか。

(3) X から $\mathbb{R}^3$ への写像 f_3 を、$f_3(\Delta) = (\Delta$ の三辺の長さ) で決めようと思う。f_3 は

(4) X から $\mathbb{R}^3$ への写像 f_4 を、$f_4(\Delta) = (\Delta$ の三辺の長さを短い順に並べたもの) で決めようと思う。f_4 は写像だろうか。

問題 14.2. (1) 正方形全体の集合 を X_1 とおく。このとき、X_1 から $\mathbb{R}$ への写像を、$f(x) = (x$ の 1 辺の長さ) で定義できるだろうか。

(2) 長方形全体の集合 を X_2 とおく。このとき、X_2 から $\mathbb{R}$ への写像 f を、$f(x) = (x$ の 1 辺の長さ) で定義できるだろうか。

(3) 前問と同じ X_2 について、 X_2 から $\mathbb{R}$ への写像 g を $g(x) = (x$ の周の長さ) で定義できるだろうか。

問題 14.3. $\mathbb{Z}$ における二項関係を $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in 6\mathbb{Z}$ で定義する。このとき、

(1) $\sim$ は同値関係であることを示しなさい。

(2) 以下この問題では、$x \in \mathbb{Z}$ の $\sim$ に関するクラスを $[x]$ と書く。1 のクラス $[1]$ に属する $\mathbb{Z}$ の元をすべて答えなさい。

(3) $\mathbb{Z}/\sim$ から $\mathbb{Z}$ への写像 f を、$f([x]) = (x$ を 3 で割った余り) で定義できるだろうか。

(4) $\mathbb{Z}/\sim$ から $\mathbb{Z}$ への写像 f を、$f([x]) = (x$ を 4 で割った余り) で定義できるだろうか。

問題 14.4. $\mathbb{Z}$ における二項関係を $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in 12\mathbb{Z}$ で定義する。このとき、

(1) $\sim$ は同値関係であることを示しなさい。

(2) 以下この問題では、$x \in \mathbb{Z}$ の $\sim$ に関するクラスを $[x]$ と書く。3 のクラス $[3]$ に属する $\mathbb{Z}$ の元をすべて答えなさい。

(3) $\mathbb{Z}/\sim$ から $\mathbb{Z}$ への写像 f を、$f([x]) = (x$ を 5 で割った余り) で定義できるだろうか。

(4) $\mathbb{Z}/\sim$ から $\mathbb{Z}$ への写像 f を、$f([x]) = (x$ を 4 で割った余り) で定義できるだろうか。