代数学 II 要約 NO.15

今日のテーマ: $\boxed{\text{復習}}$

定理 15.1. PID A 上の有限生成加群は A のいくつかの直和と、A/p^eA (p は A の素元、$p \in \mathbb{Z}_{>0}$) の形の加群の直和と同型である。

注意。PID A の元 f, g が互いに素ならば $A/fA \oplus A/gA \cong A/(fg)A$ がなりたつ。

系 15.2. 有限生成アーベル群は $\mathbb{Z}$ のいくつかの直和と、$\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z}$ (p は 素数、$p \in \mathbb{Z}_{>0}$) の形の加群の直和と同型である。

系 15.3. 体 $\Bbbk$ 上の正方行列 $L \in M_n(\Bbbk)$ が与えられたとする。$V = \Bbbk^n$ に $\Bbbk[X]$-加群の構造を

$$p(X).v = p(L)v \qquad (p \in \Bbbk[X], v \in V)$$

により定義する。このときこの加群 V は $\Bbbk[X]/p(X)^e\Bbbk[X]$ ($p(X)$ は $\Bbbk$ 上の既約多項式、$e \in \mathbb{Z}_{>0}$) の形の $\Bbbk[X]$-加群と同型である。

とくに、$\Bbbk$ が代数的閉体ならば、V は $V_c^{(e)} = \Bbbk[X]/(X-c)^e$ ($c \in \Bbbk$, $e \in \mathbb{Z}_{>0}$) の形の加群と同型であり、その適当な基底を選べば L は $V_c^{(e)}$ 上ジョルダン細胞の形で表される。よって、V の基底を適当に選べばその基底に対して L はジョルダンの標準型で表される。