代数学 II 要約 NO.14

今日のテーマ: $\boxed{\text{群の表現と加群の理論}}$

◎完全系列

定義 14.1. 環 A と、 A-加群 L, M, N が与えられているとする。このとき、

(1) A-加群の準同型 f, g を並べた「系列」

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

が**完全系列** (exact sequence) であるとは、$\mathrm{Image}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ である時にいう。

(2) もっと長い A-加群の「系列」

$$\to M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+2} \to$$

についても、これが**完全系列** (exact sequence) であるということを $\mathrm{Image}(f_i) = \mathrm{Ker}(f_{i+1})$ が成り立つことで定義する。

補題 14.2. 環 A 上の任意の A-加群 L, M とその間の準同型 f にたいし、

(1) $0 \to L \xrightarrow{f} M$ が完全 $\Leftrightarrow$ f が単射。

(2) $L \xrightarrow{f} M \to 0$ が完全 $\Leftrightarrow$ f が全射。

定義 14.3.

$$0 \to L \to M \to N \to 0$$

の形の完全列を**短完全列**とよぶ。

補題 14.4. A-加群の 短完全列

$$(*) \qquad 0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

について、次は同値である。

(1) A-準同型写像 $\nu : N \to M$ で、 $g \circ \nu = \mathrm{id}$ を満たすものが存在する。(このような ν のことを g の **section** と呼ぶ。

(2) M の部分加群 K で $M = f(L) \oplus K$ を満たすものが存在する。

(3) A-準同型写像 $\mu : M \to L$ で、 $\mu \circ f = \mathrm{id}$ を満たすものが存在する。(このような μ のことを f の **section** と呼ぶ。

定義 14.5. 上の補題の仮定のもとで、(1)-(3) のうちひとつ (したがって、全部) の条件が成り立つとき、(*) は**分裂する** (split) という。

線形代数学の知識ですぐわかるように、体上の 短完全列は必ず分解する。他方、 $\mathbb{Z}$-加群の完全列

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 3} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to 0$$

は分裂しない。(体以外の) 大抵の環 A に対しては、このように分裂しない短完全列が存在するのだが、下記のような例外もある。

定理 14.6 (マシュケの定理 (を加群の言葉で述べたもの))**.** 体 k と有限群 G が与えられていて、G の位数 g と k の標数 p とは互いに素であると仮定する。このとき、$k[G]$-加群の短完全列 ($A = k[G]$ のときの (*)) は必ず分裂する。

証明は g の k-加群としての section を G の作用でもって「 平均を取る」ことにより得られる。

問題 14.1. 有限群 G にたいして、$\Psi : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}$ を、 $\Psi(\sum_g a_g \cdot g) = \sum_g a_g)$ で定める。

(1) Ψ は $\mathbb{C}[G]$-加群の準同型であることを示しなさい。ただし、$\mathbb{C}$ には G は自明に作用する (すなわち、$g.c = c \qquad \forall g \in G \forall c \in \mathbb{C}$)) ものとする。

(2) Ψ の核 を K と置く。このとき、$\mathbb{C}[G]$-加群の短完全列

$$(**) \qquad 0 \to K \to \mathbb{C}[G] \xrightarrow{\Psi} \mathbb{C} \to 0$$

の分裂を与えるような Ψ の section $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}[G]$ をひとつ与えよ。(わかりにくい場合には $G = C_3$ の場合のみに解答を書いても良い)

補足 1.

補題 14.7. 環 A が与えられたとき、

(1) A-左加群 M, N にたいして、M から N への A-準同型の全体
$$\mathrm{Hom}_A(M, N)$$
は加群の構造を持つ。

(2) さらに A が可換なら、$\mathrm{Hom}_A(M, N)$ は A-加群の構造を持つ。

◎ 一般に、 $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ は A の中心 $Z(A)$ の上の加群と見ることができる。その他、 M, N が特殊なものの場合には、$\mathrm{Hom}_A(M, N)$ にエクストラな構造が入ることがある。例えば、A が可換でなくても $\mathrm{Hom}_A(M, A)$ は A-右加群の構造を持つ。