

代数学 II 要約 NO.13

第 13 回目の主題： 作用

定義 13.1. 環 A と群 G が与えられたとき、 A 上の G の群環 $A[G]$ とは、形式的な有限和の集合

$$A[G] = \left\{ \sum_{g \in G} a_g g ; \quad a_g = 0 \quad \forall g \in G \right\}$$

に形式的に和、積を導入したものである。(「 $\forall \bullet$ 」は「有限個の例外を除いて全ての \bullet に対して」という意味である。) 具体的には、和、積は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} (1) \quad & \sum_g a_g g + \sum_g b_g g = \sum_g (a_g + b_g) g. \\ (2) \quad & \sum_g a_g g \cdot \sum_g b_g g = \sum_g \left(\sum_h a_h b_{h^{-1}g} \right) g \end{aligned}$$

定義 13.2. 体 k が与えられているとする。群 G の k 上の n -次線形表現 Φ とは、群準同型 $\Phi: G \rightarrow \text{GL}_n(k)$ のことである。

命題 13.3. 群 G の k 上の n -次線形表現 Φ が与えられたとき、 $A[G]$ の k^n への作用が

$$\left(\sum_g a_g g \right) \cdot v = \sum_g a_g \Phi(g)v \quad (v \in k^n)$$

で定まる。

問題 13.1. 5次巡回群 $C_5 = \langle a; a^5 = e \rangle$ の上の \mathbb{C} 上の群環 $\mathbb{C}[C_5]$ の次の計算をしせよ。(答はできるだけ簡単にすること。)

$$(e + a + a^2 + a^3 + a^4)(e + a^3)$$