

代数学 II 要約 NO.13

第 13 回目の主題： 作用

**定義 13.1.** 環  $A$  と群  $G$  が与えられたとき、 $A$  上の  $G$  の群環  $A[G]$  とは、形式的な有限和の集合

$$A[G] = \left\{ \sum_{g \in G} a_g g ; \quad a_g = 0 \quad \forall g \in G \right\}$$

に形式的に和、積を導入したものである。(「 $\forall \bullet$ 」は「有限個の例外を除いて全ての  $\bullet$  に対して」という意味である。) 具体的には、和、積は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} (1) \quad & \sum_g a_g g + \sum_g b_g g = \sum_g (a_g + b_g) g. \\ (2) \quad & \sum_g a_g g \cdot \sum_g b_g g = \sum_g \left( \sum_h a_h b_{h^{-1}g} \right) g \end{aligned}$$

**定義 13.2.** 体  $k$  が与えられているとする。群  $G$  の  $k$  上の  $n$ -次線形表現  $\Phi$  とは、群準同型  $\Phi: G \rightarrow \text{GL}_n(k)$  のことである。

**命題 13.3.** 群  $G$  の  $k$  上の  $n$ -次線形表現  $\Phi$  が与えられたとき、 $A[G]$  の  $k^n$  への作用が

$$\left( \sum_g a_g g \right) \cdot v = \sum_g a_g \Phi(g)v \quad (v \in k^n)$$

で定まる。

**問題 13.1.** 5次巡回群  $C_5 = \langle a; a^5 = e \rangle$  の上の  $\mathbb{C}$  上の群環  $\mathbb{C}[C_5]$  の次の計算をしせよ。(答はできるだけ簡単にすること。)

$$(e + a + a^2 + a^3 + a^4)(e + a^3)$$