代数学 II 要約 NO.12

今日のテーマ: $\boxed{\text{「群の表現」の定義、正則表現}}$

環 A と有限群 G が与えられているとき、群環 $A[G]$ が定義される。実は、G は $A[G]$ 自体の上に表現できる。このことを、とくに R が体 K のときに詳しく見てみることにする。

定義 12.1. 環 A と群 G が与えられたとき、A 上の G の **群環** $A[G]$ とは、形式的な有限和の集合

$$A[G] = \left\{ \sum_{g \in G} a_g g \ ; \qquad a_g = 0 \quad \forall' g \in G \right\}$$

に形式的に和、積を導入したものである。(「$\forall' \bullet$」は「有限個の例外を除いて全ての $\bullet$ に対して」という意味である。) 具体的には、和、積は次のように与えられる。

(1) $\sum_g a_g g + \sum_g b_g g = \sum_g (a_g + b_g) g.$

(2) $\sum_g a_g g \cdot \sum_g b_g g = \sum_g (\sum_h a_h b_{h^{-1}g}) g$

定義 12.2. 体 k が与えられているとする。群 G の k 上の n-次線形表現 Φ とは、群準同型 $\Phi : G \to \mathrm{GL}_n(k)$ のことである。

命題 12.3. 群 G の k 上の n-次線形表現 Φ が与えられたとき、$A[G]$ の k^n への作用が

$$(\sum_g a_g g).v = \sum_g a_g \Phi(g) v \qquad (v \in k^n)$$

で定まる。

K 上の G の n-次元表現 Φ が決まると、$K[G]$ の $V = K^n$ への作用が命題 3.6 のように定まって、V は $K[G]$-加群の構造を持つ。逆に、K-上有限次元の $K[G]$-加群 V_1 が与えられれば、(すなわち、K-ベクトル空間 V_1 上に G の作用が定まっていれば、) その基底を固定することにより、G の表現が定まることが容易に分かる。行列を書くよりもその方が簡明であることが多いので、以下では多くの場合 $K[G]$ の作用でもって表現を定義する。

補題 12.4. 有限群 G と体 K が与えられているとする。$K[G]$ 自身は $K[G]$ 上の左加群とみなすことができる。この表現 λ を G の左正則表現と呼ぶ。

厳密にいえば、G の元にどのように順番を付けるかによって G の各元を表す行列は違ってくる。ここでは G の元の順番は適当に付けて、それを明示した上で行列で表現することにする。

問題 12.1. 4 つの元の偶置換全体のなす群 $\mathfrak{A}_4$ の正則表現で、$(1\ 2\ 3)$ および $(1\ 2)(3\ 4)$ に対応する行列を書き下しなさい。($\mathfrak{A}_4$ の元の順番を明示しておくこと。)

問題 12.2. 位数 $2n$ の二面体群

$$\mathbb{D}_{2n} = \langle a, b; a^n = e, b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$$

の正則表現で、$n = 2, 3$ の場合 (できれば、もっと一般の場合も) a, b に対応する行列はどのようになるか答えなさい。(二面体群については、すでに二年生段階で習っているはずなので、本問では詳しくは述べない。)