代数学 II 要約 NO.8

第 8 回目の主題：$\boxed{\text{PID 上の有限生成加群 (補遺 2)}}$

補題 8.1. $\underline{x} \in \mathcal{S}_M$ と、その関係式 $(a_1, \ldots, a_k)$ を全て考える。これらの全ての組み合わせについて、 $\gcd(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ を考えた時、それらの中で (整除に関して) 極小なものが存在する。 その一つを以下 d_0 と書こう。このとき、

(1) $d_0 = 0$ なら M は自由加群である。以下、$d_0 \neq 0$ とする。
(2) ある $(u_1, u_2, \ldots, u_k) \in \mathcal{S}_M$ が存在して、
$$d_0 \cdot u_1 = 0$$
なる関係式が成立する。
(3) $\underline{u}$ の任意の関係式 $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ について、その各成分 $a_1, a_2, \ldots, a_k$ は各々 d_0 で割り切れる。
(4) M は Au_1 と $Au_2 + \cdots + Au_k$ の直和と同型である。

この補題を用いると、前回の定理よりすこし強い主張をすることができる。

定理 8.2. 可換 PID A 上の有限生成加群 M が与えられているとする。このとき、M の生成系 $\underline{m} = \{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ にたいして、$\underline{m}$ を (変換 1),(変換 2),(変換 3) を有限回繰り返すことにより、M の新しい生成系 $\underline{w}$ であって、
$$M \cong Aw_1 \oplus Aw_2 \oplus \cdots \oplus Aw_k \cong A/a_1A \oplus A/a_2A \oplus \cdots \oplus A/a_kA \qquad (a_1, \ldots, a_k \in A)$$
(巡回加群の直和) となるものが存在する。

さらに、上の同型は $a_k | a_{k-1} | a_{k-2} | \ldots | a_2 | a_1$ となるように取れる。

系 8.3 (有限生成アーベル群の基本定理)**.** 任意の有限生成アーベル群 G は巡回群の有限個の直和である。もっと詳しくは、G は
$$\mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/a_2\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/a_k\mathbb{Z}$$
$(a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z})$ という加群とアーベル群として同型である。

応用として、次の定理を挙げておく。

定理 8.4. 体 K の乗法群 $K^\times$ の有限部分群は常に巡回群である。とくに、有限体の乗法群はかならず巡回群である。