代数学 II 要約 NO.6

第 6 回目の主題：$\boxed{\text{PID 上の有限生成加群の構造 (1)}}$

次のことをこの講義からしばらくの間の目標にしよう。

定理 6.1. PID A 上の有限生成加群は必ず $A/(a)$ の形の加群の直和である。

言葉の確認から:

可換環 A は、0 以外に零因子を持たないとき**整域**と呼ばれるのでした。

定義 6.2. 整域 A が **PID** (principal ideal domain, 主イデアル整域) であるとは、A の任意のイデアルがひとつの元で生成されるときにいう。

「余りを許した割り算」が必ずできるような整域のことを**ユークリッド整域**と呼ぶのでした。

次の定理は代数 IB で学習済みのことと思います。

定理 6.3. ユークリッド整域は必ず PID である。

定理 6.4. PID はかならず **UFD** である。すなわち、素因数分解の一意性が成り立つ。

これらの諸定理から、次のことがすぐに分かる。

命題 6.5. PID A 上の加群が、ひとつの元で生成されるなら、それは A/Aa $(\exists a \in A)$ の形の加群と同型である。

補題 6.6. PID A 上の加群 M が 2 つの元 m_1, m_2 で生成されているとし、

$$a_1 m_1 + a_2 m_2 = 0$$

なる関係式が成り立っていたとする。このとき、

次のような m_1', m_2' が存在する。

(1) m_1', m_2' は M の生成元である。

(2) $d m_1' = 0$. (ただし d は a_1 と a_2 の最大公約元。)

命題 6.7. 可換 PID A の元 a, b に対して、イデアル $Aa + Ab$ はある単項イデアル Ad と等しい。このとき、ある a', b', x, y が存在して、次の二式が成り立つ。

(1) $a = a'd, \quad b = b'd.$

(2) $a'x + b'y = 1.$

とくに、

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ -y & x \end{pmatrix}$$

は $\mathrm{SL}_2(A)(\subset \mathrm{GL}_2(A))$ の元である。

命題 6.8. 可換 PID A のイデアルの増加列

$$I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset I_4 \subset \dots$$

は必ず有限で止まる。すなわち、ある N があって、

$$I_N = I_{N+1} = I_{N+2} = \dots$$

が成り立つ。