

## 線形代数学概論 A NO.16

### 試験

- 持ち込みは何でも可である。ただし、他人の迷惑になるもの、および通信機能をもつものを除く。
- 解答用紙には必ず学生番号と名前を記入すること。
- 解答用紙の裏面を用いてもよいが、その場合にはそれが分かるように明記すること。
- 言うまでもないことだが、数値的な答だけでは十分ではない。論理的な説明がより重要である。
- 成績は理学部 2 号棟 6F 数学コース掲示板において確認できるようにする。掲示があるまでは成績の照会等には応じられない。

問題 16.1. 次の各問に答えなさい。

(1)  $\mathbb{R}^3$  のベクトル  $v_1, v_2, v_3$  を

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

で定義する。このとき  $v_1, v_2, v_3$  は一次独立だろうか、それとも一次従属だろうか。理由をつけて答えなさい。

(2)  $\mathbb{R}^3$  のベクトル  $w_1, w_2, w_3$  を

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

で定義する。このとき  $w_1, w_2, w_3$  を並べてできる行列  $P = (w_1 \ w_2 \ w_3)$  の逆行列を求めなさい。

(3) (2) の  $w_1, w_2, w_3$  をそれぞれ順に (1) の  $v_1, v_2, v_3$  に写すような行列  $A$  を求めなさい。

(4) (3) の  $A$  の核を求めなさい。

(5) (3) の  $A$  と (1) の  $v_1, v_2$  にたいして、 $Ax = v_1 + 3v_2$  を満たすような  $x \in \mathbb{R}^3$  をすべて見つけなさい。

解答。

(1)

$$3\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

だから、 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  は一次従属。

(2)

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3)

$$A = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3)P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -5 \\ 8 & 1 & -7 \\ 11 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

(4)  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  とおく。(1)により、 $(\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3)\mathbf{x} = 0$ 。もつ

とつよく、 $\mathbb{R}\mathbf{x} = \text{Ker}(\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3)$  が分かる。よって、

$$\text{Ker}(A) = \mathbb{R}P\mathbf{x} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(5)

$$\mathbf{x} = \mathbf{w}_1 + 3\mathbf{w}_2 + c \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (c \in \mathbb{R})$$