線形代数学概論 A NO.13 要約

行列 A の分解 $A = PF_{m,n}(r)Q$ は「どのベクトルを活かすか」、「どのベクトルは潰すか」を決めているのでした。正則行列 P の逆行列は $(P \quad E)$ の行基本変形で求めることができるのでした。

....

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$

連立一次方程式と基本変形 (2)

両側基本変形を用いると、一次方程式の解法は大変見通しが良くなる。

(あ)
$$A\mathbf{v} = \mathbf{b}$$
において、A を両側基本変形し、
$$PAQ = F(r)$$
を得たとする。このとき、
$$PAQQ^{-1}\mathbf{v} = P\mathbf{b}$$

$$\mathbf{w} = Q^{-1}\mathbf{v}$$
と書いてみると、$Q\mathbf{w} = \mathbf{v}$ というふうに逆にもかけるから、これは可逆な変数変換であり、連立方程式 (あ) は

(い)
$$F(r)\mathbf{w} = \mathbf{b}'$$
を解くのと同等である。但し、$\mathbf{b}' = P\mathbf{b}$.

例 13.1.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 10 & 7 & 8 \\ 9 & 18 & 11 & 12 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$
のときを考えよう。
$$P = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 8 & -16 & 8 \end{pmatrix}, \qquad Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
により、$PAQ = F_{3,4}(2)$ と表せる。
$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{w}$$
と変数変換すれば、
$$F_{3,4}(2)\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} \left(= \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = Q\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \frac{5b_1 - b_2}{8} \\ b_1 - 2b_2 + b_3 \end{pmatrix}$$
をとけば良いことになる。それは易しい。

◎一般逆行列。

与えられた 行列 $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ に対して、$B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ で、

$$ABA = A$$

を満たすようなものを A の**一般逆行列**という。

例 13.2. $F_{m,n}(r)$ の一般逆行列の一つとして、$F_{n,m}(r)$ がある。

一般逆行列は一意ではない。が、

命題 13.1. 与えられた行列 A に対して、 A の一般逆行列が必ず一つは存在する。

一般逆行列を用いて連立方程式を求めることもできる。

問題 13.1.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。さらに、

$$R = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

とおく。$A = PF_{2,3}(1)Q$ とおく。与えられたベクトル $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ に対して、方程式 (※) $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$ を考えよう。つぎの各問に答えなさい。

(1) 行列 RQ を計算せよ。
(2) P, Q の逆行列をそれぞれ求めなさい。
(3) $\mathbf{b} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ と書いた時、方程式 (※) が解を持つためには、c_1, c_2 はどのような条件を満たせばよいか。
(4) $\mathbf{b}, c_1, c_2$ が前問の条件を満たして方程式 (※) が解を持つとき、その解をすべて求めなさい。