

第 14 回目の主題： 写像は定義域の元を類別する。

定義 14.1. (再) 集合 X の部分集合の族 $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が X のクラス分け (分割とも言う) であるとは、つぎのことが成り立つときに言う。

- (1) $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda = X$.
- (2) $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda, \lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば $C_{\lambda_1} \cap C_{\lambda_2} = \emptyset$.

定義 14.2. (再) X の 2 つの元 x, y にたいして、 $x \sim y$ か、そうでない ($x \not\sim y$) かがきちんと定まっていて、次の性質を持つとき、 \sim のことを X 上の同値関係という。

- (1) $\forall x \in X \forall y \in X \forall z \in X$ (「 $x \sim y$ and $y \sim z$ 」 $\implies x \sim z$).
- (2) $\forall x \in X$ ($x \sim x$).
- (3) $\forall x \in X \forall y \in X$ ($x \sim y \implies y \sim x$).

命題 14.3. X に同値関係 \sim が定まっているとする。このとき、 $x \sim y$ か否かによって、 x と y が同じクラスか否かを定めることで X のクラス分けが定義される。

◎写像になる、ならない

問題 14.1. $X =$ (三角形全体の集合) とする。

- (1) X から \mathbb{R} への写像 f_1 を、 $f_1(\Delta) =$ (Δ の一つの辺の長さ) で決めようと思う。 f_1 は写像だろうか。
- (2) X から \mathbb{R} への写像 f_2 を、 $f_2(\Delta) =$ (Δ の最短の辺の長さ) で決めようと思う。 f_2 は写像だろうか。
- (3) X から \mathbb{R}^3 への写像 f_3 を、 $f_3(\Delta) =$ (Δ の三辺の長さ) で決めようと思う。 f_3 は
- (4) X から \mathbb{R}^3 への写像 f_4 を、 $f_4(\Delta) =$ (Δ の三辺の長さを短い順に並べたもの) で決めようと思う。 f_4 は写像だろうか。

問題 14.2. (1) 正方形全体の集合を X_1 とおく。このとき、 X_1 から \mathbb{R} への写像を、 $f(x) =$ (x の 1 辺の長さ) で定義できるだろうか。

- (2) 長方形全体の集合を X_2 とおく。このとき、 X_2 から \mathbb{R} への写像 f を、 $f(x) =$ (x の 1 辺の長さ) で定義できるだろうか。
- (3) 前問と同じ X_2 について、 X_2 から \mathbb{R} への写像 g を $g(x) =$ (x の周の長さ) で定義できるだろうか。

問題 14.3. \mathbb{Z} における二項関係を $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in 6\mathbb{Z}$ で定義する。このとき、

- (1) \sim は同値関係であることを示しなさい。
- (2) 以下この問題では、 $x \in \mathbb{Z}$ の \sim に関するクラスを $[x]$ と書く。1 のクラス $[1]$ に属する \mathbb{Z} の元をすべて答えなさい。
- (3) \mathbb{Z}/\sim から \mathbb{Z} への写像 f を、 $f([x]) =$ (x を 3 で割った余り) で定義できるだろうか。
- (4) \mathbb{Z}/\sim から \mathbb{Z} への写像 f を、 $f([x]) =$ (x を 4 で割った余り) で定義できるだろうか。

問題 14.4. \mathbb{Z} における二項関係を $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in 12\mathbb{Z}$ で定義する。このとき、

- (1) \sim は同値関係であることを示しなさい。
- (2) 以下この問題では、 $x \in \mathbb{Z}$ の \sim に関するクラスを $[x]$ と書く。3 のクラス $[3]$ に属する \mathbb{Z} の元をすべて答えなさい。
- (3) \mathbb{Z}/\sim から \mathbb{Z} への写像 f を、 $f([x]) =$ (x を 5 で割った余り) で定義できるだろうか。
- (4) \mathbb{Z}/\sim から \mathbb{Z} への写像 f を、 $f([x]) =$ (x を 4 で割った余り) で定義できるだろうか。