論理と集合要約 NO.5

第 5 回目の主題：$\boxed{\text{集合の和集合や共通部分 (2)、積集合}}$

論理と集合は裏腹の関係にあり、集合の包含関係 (含む、含まれるの関係) は対応する論理で証明するのが良いのでした。

. . . .

問題 5.1. $2\mathbb{Z} \subset 5\mathbb{Z}$ だろうか。

問題 5.2. $2\mathbb{Z} \subset 6\mathbb{Z}$ だろうか。

◎積集合

一般に, 元 x と 元 y を順序をつけて並べたもの (x, y) を x, y のペア (組) と呼ぶ。x, y が実数の場合には開区間と全く同じ記号になってしまっていて、紛らわしいのだが、区別するときには「区間 (x, y)」,「ペア (組) (x, y)」と前につけると良いだろう。

定義 5.1. 集合 X, Y に対して、X の元と Y の元のペアの全体の集合

$$\{(x, y); x \in X, y \in Y\}$$

を X と Y の**積集合**といい、 $X \times Y$ で書き表す。

もっと一般に、集合族 $\{X_\lambda\}_\lambda \in \Lambda$ に対して、

$$\{(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}; x_\lambda \in X_\lambda\}$$

を $\{X_\lambda\}$ の**積集合**といい、$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ で書き表す。

積集合は「積の集合」では<u>ない</u>。そのことを強調するため、積集合のことを「デカルト積集合」とか「集合としての直積」と呼ぶこともある。

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ のことを $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ のことを $\mathbb{R}^3$ 等と略記する。

以下では絶対値の性質を用いる。高校でよく出てくる性質の他、大切なのは

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

という性質であろう。この不等式は**三角不等式**と呼ばれる。

問題 5.3. $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| < 1\}$, $B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ とおくとき、$D_1 \subset B_1$ だろうか。

問題 5.4. $D_{1/2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| < 1/2\}$, $B_{1/2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1/4\}$ とおくとき、$D_{1/2} \subset B_{1/2}$ だろうか。

問題 5.5. 正の実数 r に対して、$D_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| < r\}$, $B_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < r^2\}$ とおくとき、$D_r \subset B_r$ だろうか。

$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ にたいし、その**ノルム**を

$$||v|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

で定義する。このとき、$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ にたいして、

$$||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$$

がなりたつ。(三角不等式。) このことの証明は内積の定義と性質を用いたほうが良いのでここでは省く。興味のある人は線形代数の教科書を見てみること。

一般に、$a \in \mathbb{R}^n$ と $r > 0$ に対して、

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x - a|| < r\}$$

(a を中心とする半径 r のボール。) とおく。

問題 5.6. $v \in \mathbb{R}^n$ のノルムを R とおくと、

$$B_r(v) \subset B_{(R+r)}(0)$$

が成り立つことを証明せよ。