

## 線形代数学概論 A NO.9 要約

行列に基本行列を右から掛けることにより、行列を変形できるのでした。右基本変形を駆使することで、行列の逆行列を計算できます。

### 今日のテーマ 行列の基本変形

$$P_n(ij; c) = E_n + cE_{ij} \quad (i \neq j)$$

$$Q_n(i; c) = (E_n \text{ の } i \text{ 列を } c \text{ 倍した行列}) \quad (c \neq 0)$$

$$R_n(i, j) = (E_n \text{ の } i \text{ 列と } j \text{ 列を入れ替えた行列})$$

#### 右基本変形

与えられた行列  $A$  (正方行列と限らない) にたいし、基本行列 (これは正方行列) を右からいくつかかけることにより、 $A$  と同じサイズの新しい行列を作ることができる。この操作を右基本変形という。

右基本変形は、基本ベクトルの行き先をみることで理解することができる。

命題 9.1 (再).  $A$  を  $m \times n$  行列 ( $m$  行  $n$  列の行列) とするとき、

- (1)  $AP_n(i, j; c)$  は  $A$  の  $i$  列の  $c$  倍を  $A$  の  $j$  列に加えた行列である。
- (2)  $AQ_n(i; c)$  は  $A$  の  $j$  列を  $c$  倍した行列である。
- (3)  $AR_n(i, j)$  は  $A$  の  $i$  列と  $j$  列を入れ替えた行列である。

というわけで、これらを列基本変形とも言う。

例題 9.1.  $x, y, z$  はどの2つも相異なるような実数とする。このとき、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}$$

に基本変形を繰り返して  $E_3$  に変形せよ。(余力があれば、 $A$  の逆行列をもとめよ。)

上の命題 9.1 と同様に、次の命題を証明することができる。

命題 9.2.  $A$  を  $m \times n$  行列 ( $m$  行  $n$  列の行列) とするとき、

- (1)  $P_m(i, j; c)A$  は  $A$  の  $i$  行の  $c$  倍を  $A$  の  $j$  行に加えた行列である。
- (2)  $Q_m(i; c)$  は  $A$  の  $j$  行を  $c$  倍した行列である。
- (3)  $R_m(i, j)A$  は  $A$  の  $i$  行と  $j$  行を入れ替えた行列である。

(これらを行基本変形という。)

基本行列を左右どちらからかけたかを選ぶことが、列か、行どちらかを変形するのを選んでいくことになる。

ということは覚えておくと良い。

左、右基本変形を繰り返すことにより、行列をより簡単な形にしたい。つぎの方針が考えられる。

- (方針 1) 右基本変形のみを繰り返して簡単にする。
- (方針 2) 左基本変形のみを繰り返して簡単にする。
- (方針 3) どちらもごちゃまぜに使って簡単にする。

どの方針をとっているかを意識することが大事である。

前回は、(方針 1) で考えたのであった。(方針 2) は(方針 1) と似たようなことになる。今回は、(方針 3) で考えてみよう。

定義 9.1.  $m, n$  行列

$$F(r) = F_{m,n}(r) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を、両側基本変形の標準形の行列と呼ぶ。

命題 9.3. 任意の  $m, n$  行列  $A$  は、うまく両側基本変形すれば、両側基本変形の標準形の行列に変形できる。

いちいち「両側」と断るのは面倒なので、その内に略すことにするが、今回は念のためつけておくことにする。

例題 9.2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

を両側基本変形し、標準形に直しなさい。

例題 9.3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

を両側基本変形し、標準形に直しなさい。

問題 9.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

を両側基本変形し、標準形に直しなさい。