代数学 IA 演習問題 NO.11

$\boxed{\text{準同型定理編}}$今回は、一学期の目標である《群の準同型定理》について出題します。

問題 11.1. $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ への写像 f を

$$f([n]_9) = [n]_3$$

で定めます。このとき、

(1) f は全射準同型写像であることを示しなさい。
(2) f によって $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ の各元が $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ のどの元にうつるか？対応表を書き上げることによって示しなさい。
(3) f によって同じもの同士を同じクラスにして $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ をクラス分けし、クラス分けの表を書きなさい。
(4) $\mathrm{Ker}\, f$ を求めなさい
(5) $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ を $\mathrm{Ker}\, f$ を法としてクラス分けしなさい。

問題 11.2. $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ への写像 f を

$$f([n]_8) = [3n]_6$$

で定めます。このとき、

(1) f は準同型写像であることを示しなさい。
(2) f の像を求めなさい。
(3) f によって $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ の各元が $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ のどの元にうつるか？対応表を書き上げることによって示しなさい。
(4) f によって同じもの同士を同じクラスにして $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ をクラス分し、クラス分けの表を書きなさい。
(5) f の核を求めなさい
(6) $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ を $\mathrm{Ker}\, f$ を法としてクラス分けしなさい。

問題 11.3. 有限群 G が一つの元 g で生成されているとき、G は有限巡回群と同型であることを示しなさい。

問題 11.4. 無限群 G が一つの元 g で生成されているとき、G は $\mathbb{Z}$ と同型であることを示しなさい。

問題 11.5.

(1) $20\mathbb{Z}$ は $4\mathbb{Z}$ の正規部分群であることを示しなさい。
(2) 写像 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ を、$f(x) = [x]_5$ で定義すると、f は準同型写像になることを示しなさい。
(3) 上の f の核を求め、$4\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ が $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ と同型であることを示しなさい。

問題 11.6. m, n はそれぞれ正の整数であるとします。この時、$m\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ と同型であることを示しなさい。

問題 11.7. 複素数 z に対して、その共役を $\bar{z}$ であらわします。このとき、

(1) $\mathbb{C} \ni z \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C}$ は複素数全体のなす加法群 $(\mathbb{C}, +)$ からそれ自身への同型写像を与えることを示しなさい。
(2) $\mathbb{C}^\times \ni z \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C}^\times$ は複素数全体から 0 を除いたもののなす乗法群 $(\mathbb{C}^\times, \times)$ からそれ自身への同型写像を与えることを示しなさい。

問題 11.8. 複素数を成分に持つ行列 $A=(a_{ij})$ に対して、その随伴行列 A^* を、

$$A^*=(\bar{a_{ji}})$$

で定義します。(すなわち、A^* は、A の転置行列 ${}^tA$ の各行列成分についておのおのの複素共役をとったものです。) 例えば、

$$\begin{pmatrix} 1 & 4+5i \\ 2+3i & 6+7i \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 & 2-3i \\ 4-5i & 6-7i \end{pmatrix}$$

と言う具合です。この時、

(1) 複素数を成分に持つ n-次正方行列 (=$n\times n$-行列) 全体を $M_n(\mathbb{C})$ と書けば、$M_n(\mathbb{C})\ni A\mapsto A^*\in M_n(\mathbb{C})$ は行列の加法群 $(M_n(\mathbb{C}),+)$ からそれ自体への同型写像であることを示しなさい。

(2) 複素数を成分に持つ可逆 n-次正方行列 (=$n\times n$-行列) 全体を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ と書けば、$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\ni A\mapsto (A^*)^{-1}\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ は可逆行列全体のなす乗法群 $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\times)$ (一般線型群と呼ばれる) からそれ自体への同型写像であることを示しなさい。

問題 11.9. 複素数を成分に持つ正方行列 A がユニタリ行列であるとは、$A^*A=I$ (単位行列) が成り立つ時に言います。さて、ユニタリ行列全体 $\mathrm{U}(n)$ は乗法に関して群をなすことを示しなさい。($\mathrm{U}(n)$ はユニタリ群と呼ばれます。)

問題 11.10. (1) 写像

$$\det:\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\ni A\mapsto \det(A)\in\mathbb{C}^\times$$

は準同型であることを示しなさい。

(2) $\det(A^*)=\overline{\det(A)}$ であることを示しなさい。

(3) A がユニタリ行列なら、$|\det(A)|=1$ であることを示しなさい。

問題 11.11. f,g はともに群 G から 群 H への準同型であるとします。このとき、

$$K=\{x\in G; f(x)=g(x)\}$$

は G の部分群であることを示しなさい。K は G の正規部分群とは限らないことを、実例を挙げて示しなさい。

問題 11.12. 同型

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z}\cong\left\{\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix};\theta\in\mathbb{R}\right\}$$

の存在を示しなさい。

問題 11.13. $f:G\to G'$ が群のあいだの準同型で、G の正規部分群 N が、$f(N)=\{e'\}$ (e' は G' の単位元) を満たすならば、準同型 $g:G/N\to G'$ が存在して、$f=g\iota$ を満たすことを示しなさい。ただし、ここで、$\iota:G\to G/N$ は自然な準同型のこととします。

問題 11.14. $T=\{z\in\mathbb{C};|z|=1\}$ は $\mathbb{C}^\times$ の正規部分群となり、剰余群 $\mathbb{C}/T$ は $\mathbb{R}^\times$ と同型であるということを示しなさい。