

代数学 IA 演習問題 NO.10

《準同型定理の基本的な考え方》編

問題 10.1. $C_n = \langle a; a^n = e \rangle$ を、位数 n の有限巡回群とします。 $f : \mathbb{Z} \rightarrow C_n$ を、

$$f(k) = a^k$$

とおくとき、次の問いに答えなさい。

- (1) f により \mathbb{Z} 上に関係 \equiv を、

$$n_1 \equiv n_2 \Leftrightarrow f(n_1) = f(n_2)$$

で定めると、これは同値関係になります。この同値関係によって 1 と同値なものを全て挙げなさい。(もちろん「列挙」する必要は無い。)

- (2) 上の同値関係によって 0 と同値なものを全て挙げなさい。
 (3) 1. に挙げたものと 2. に挙げたものとの間の関係を述べなさい。
 (4) \mathbb{Z}/\equiv の元の個数を求めなさい。

問題 10.2. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathfrak{S}_4$ を、

$$f(k) = (1\ 2\ 3\ 4)^k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

で定義します。このとき、

- (1) $f(0), f(-1), f(-2)$ を求めなさい。
 (2) f の像を求め、その元の個数を言いなさい。
 (3) f により \mathbb{Z} に関係 \equiv を、

$$a \equiv b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$$

により定めると、この関係は同値関係になります。。この同値関係により 1 と同値なものを全て挙げなさい。

- (4) \mathbb{Z}/\equiv の元の個数を求めなさい。
 (5) 本問に現れた同値関係と前問の同値関係との関係を述べなさい。

問題 10.3. $C_{10} = \langle g; g^{10} = e \rangle, C_4 = \langle h; h^4 = e \rangle$ とおき、 $f : C_{10} \rightarrow C_4$ を、 $f(g^k) = h^{2k} (k \in \mathbb{Z})$ で定義します。すなわち、

$$f(g) = h^2, f(g^2) = h^4 (= e), f(g^3) = h^6 (= h^2), \dots$$

(f はうまく定義されています。すなわち、《 $g^k = g^l$ なら $h^{2k} = h^{2l}$ 》が成り立ちます。なぜですか?) さらに、 C_{10} に関係 \equiv を $a \equiv b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$ で定義します(これは同値関係になります)。このとき C_{10} は \equiv によりどのようにクラス分けされるかをクラス分けの表をつくって示し、 C_{10}/\equiv の元の個数を求めなさい。さらに、 f の像も求めなさい。

問題 10.4. 写像 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ を、 $f(x) = (\cos(x), \sin(x))$ で定義します。このとき、次の問いに答えなさい。

- (1) f のグラフ $\Gamma_f = \{(x, f(x)) | x \in \mathbb{R}\}$ の概形を書きなさい。
 (2) f の像を求めなさい。
 (3) f により、 \mathbb{R} に関係 \equiv を、 $a \equiv b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$ で定義すると、これは同値関係になります。この同値関係について、一つの点に同値な点の全体グラフでどのような位置にくるか、答えなさい。

問題 10.5. 写像 $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$ を、 $f(x) = (\cos(\frac{\pi x}{5}), \sin(\frac{\pi x}{5}))$ で定義します。このとき、次の問いに答えなさい。

- (1) f のグラフの概形を書きなさい。
- (2) f の像を求めなさい。
- (3) f により、 \mathbb{R} に同値関係を、 $a \equiv b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$ で定義します。このとき、一つの点に同値な点の全体グラフでどのような位置にくるか、答えなさい。
- (4) \mathbb{Z}/\equiv の元の個数を求めなさい。