代数学 IB NO.3 要約

今日のテーマ: $\boxed{\text{イデアルとそれによる剰余環、「生成されるイデアル」}}$
環をイデアルで割ることにより、新しい環を作ることが出来る。これは、群を正規部分群で割る操作に似ている。

定義 3.1. R は単位元をもつ環であるとし、I はその部分集合であるとする。I が R の**イデアル**であるとは、次の条件が成り立つときにいう。

(1) I は $(R,+)$ の部分群である。すなわち、I は R の加・減法について閉じている。
(2) I の元に R の元を右から掛けても左から掛けてもやっぱり I の元になる。すなわち、任意の $x \in I$ と任意の $r \in R$ について、
$$rx \in I, xr \in I$$
が成り立つ。

例 3.1 (イデアルの例)**.**

(1) $10\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ のイデアルである。
(2) もっと一般に、$n > 0$ にたいして、$n\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ のイデアルである。
(3) 更に一般に、任意の可換環 R と 任意の $a \in R$ にたいして、 aR は R のイデアルである。
(4) 任意の環 R に対して、 $\{0\}$ は R のイデアルである。

「生成される部分環」を扱った時と同じ議論で、次のことが成り立つことがわかる。

補題 3.1. 環 R の部分集合 S が与えられているとする。このとき、S を含む R のイデアルのうち、最小のものが存在する。*(これを S で生成される R のイデアルといい、$\langle S \rangle_{R\text{-イデアル}}$ とか、 (S) と書く。)*

例 3.2. 環 $\mathbb{Z}$ のイデアルとして、次のことが成り立つ。

(1) $(2) = 2\mathbb{Z}$.
(2) $(10) = 10\mathbb{Z}$.
(3) $(12, 18) = 6\mathbb{Z}$.

例 3.3. 環 $\mathbb{Q}$ のイデアルとして、次のことが成り立つ。

(1) $(2) = \mathbb{Q}$.
(2) $(10) = \mathbb{Q}$.
(3) $(12, 18) = \mathbb{Q}$.

上の 2 つの例を比較すると分かるように、どの環で考えるかが大変重要である。

補題 3.2. R が単位元をもつ環であるとし、I をそのイデアルとする。このとき、

(1) R に同値関係 $\sim$ が、次のようにして決まる。
$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \in I.$$
(2) $R/\sim$ に、足し算を次のようにして入れる。
$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b} \quad (\bar{?} \text{ は } ? \text{ の } \sim \text{ に関するクラスを表す。})$$
この足し算はうまく定義されていて、$R/\sim$ はこの足し算について可換群になる。
(3) $R/\sim$ に、かけ算を次のようにして入れる。
$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$$
このかけ算はうまく定義されていて、$R/\sim$ はこのかけ算について半群になる。
(4) $R/\sim$ は上で定義された足し算、かけざんに関し環をなす。しかも、この環は単位元 $\bar{1}$ を持つ。

定義 3.2. 上の補題の仮定のもとで、 $R/\sim$ に上のような足し算、かけ算を入れて環にしたものを R/I と書き、R の I による**剰余環**と呼ぶ。

※レポート問題
(期限：次の講義の終了時まで。)

問題 3.1. $\mathbb{Z}$ のイデアル I が 4615 と 1469 を元として含むとき、13 も I の元であることを示しなさい。

問題 3.2. 環 $R = \mathbb{Z}/(100, 355)$ における x のクラスを $\bar{x}$ と書くことにする。このとき、

(1) $\mathbb{Z}$ の元 x で、R の中で考えると $\bar{x} = \bar{0}$ が成り立つ例を 5 つあげなさい。
(2) R の中で $\bar{5} = \bar{0}$ であることを示しなさい。