

第 15 回目の主題：復習。

例題 15.1. 命題 $P: \forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} (x < y \implies \exists z \in \mathbb{Z} (x < z \text{ and } z < y))$ について、

- (1) P の否定命題 (not P) を「not を使わずに」書きなさい。
- (2) P と not P のうち、真であるのはどちらだろうか。

例題 15.2. 写像 $f: \mathbb{Z} \ni x \mapsto x^2 - 2x \in \mathbb{Z}$ に対して、

- (1) $f^{-1}(\{0\})$ を求めなさい。
- (2) $f^{-1}(\{1\})$ を求めなさい。
- (3) $f^{-1}(\{4, 5, 6\})$ を求めなさい。
- (4) f は単射だろうか。理由を挙げて答えなさい。
- (5) f は全射だろうか。理由を挙げて答えなさい。
- (6) f によって \mathbb{Z} に同値関係 \sim_f が

$$x \sim_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

により定まる。この \sim_f により 3 と同値になる \mathbb{Z} の元をすべて求めなさい。

例題 15.3. 写像 $f: \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 - 2x \in \mathbb{R}$ に対して、

- (1) $f^{-1}(\{0\})$ を求めなさい。
- (2) $f^{-1}(\{1\})$ を求めなさい。
- (3) f は単射だろうか。理由を挙げて答えなさい。
- (4) f は全射だろうか。理由を挙げて答えなさい。
- (5) f によって \mathbb{R} に同値関係 \sim_f が

$$x \sim_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

により定まる。この \sim_f により 3 と同値になる \mathbb{R} の元をすべて求めなさい。

例題 15.4. $f: \mathbb{Z} \ni x \mapsto x^3 - x \in \mathbb{Z}$ は全射であろうか。

例題 15.5. $f: \mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 - x \in \mathbb{R}$ は全射であろうか。