論理と集合要約 NO.13

第 13 回目の主題：$\boxed{\text{写像は定義域の元を類別する。}}$

定義 13.1. (再) 集合 X の部分集合の族 $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が X の**クラス分け** (**分割**とも言う) であるとは、つぎのことが成り立つときに言う。

(1) $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} C_\lambda = X$.

(2) $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば $C_{\lambda_1} \cap C_{\lambda_2} = \emptyset$.

定義 13.2. (再) X の 2 つの元 x, y にたいして、$x \sim y$ か、そうでない $(x \not\sim y)$ かがきちんと定まっていて、次の性質を持つとき、$\sim$ のことを X 上の**同値関係**という。

(1) $\forall x \in X \forall y \in X \forall z \in X$ (「$x \sim y$ and $y \sim z$」 $\implies x \sim z$).

(2) $\forall x \in X$ $(x \sim x)$.

(3) $\forall x \in X \forall y \in X$ $(x \sim y \implies y \sim x)$.

「同値関係」と、論理で言うところの「同値」とは (遠縁の親戚ぐらいにはあたるが)、別物である。よく区別すること。

問題 13.1. (再) X のクラス分け $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が与えられたとき、$x \sim x'$ であることを

$$\exists\lambda(x \in C_\lambda \text{ and } x' \in C_\lambda)$$

か否かで判定すれば、この $\sim$ は同値関係であることを示しなさい。

問題 13.2. (再) X に同値関係 $\sim$ が与えられているとする。$x \in X$ に対して、

$$C_x = \{x' \in X; x' \sim x\}$$

とおくとき、次のことを示しなさい。

(1) $x \in C_x$. とくに、$\displaystyle\bigcup_{x\in X} C_x = X$.

(2) $x' \in C_x \implies x \in C_{x'}$.

(3) $C_x \cap C_{x'} \neq \emptyset \Leftrightarrow x \sim x' \Leftrightarrow C_x = C_{x'}$.

先ほどと同様に、C_x のなかから重複するものを省くことにより、X のクラス分けを得ることができる。容易に分かるように、上記 2 問題の操作は互いに逆になっている。すなわち、<u>クラス分けを与えることとと同値関係を与えることは本質</u>

定義 13.3. 集合 X に同値関係 $\sim$ が与えられているとき、問題 13.2 で見たように X に次のようなクラス分けが定まるのであった。

$$x_1 \in X \text{ と } x_2 \in X \text{ とが同じクラス} \Leftrightarrow x_1 \sim x_2.$$

このクラス分けによるクラスの全体を $X/\sim$ とよび、X の $\sim$ による**商集合**とよぶ。

問題 13.3. (再) 写像 $f : X \to Y$ が与えられているとき、$x \sim_f x'$ か否かの判定を $f(x) = f(x')$ か否かでするとき、すなわち、

$$x \sim_f x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$$

と定めるとき、$\sim_f$ は X の同値関係であることを定義に従って示しなさい。

上の問題の $\sim_f$ を以下でも流用する。

問題 13.4. (再) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を $f(n) = n^2$ で定義するとき、

(1) $1 \sim_f n$ となるような $n \in \mathbb{Z}$ をすべて求めなさい。

(2) $\mathbb{Z}$ の $\sim_f$ に関するクラス分けの表を書きなさい。

問題 13.5. (再) $f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x \in \mathbb{R}$ に対して、

(1) $(1, 0) \sim_f (1, 5)$ であることを示しなさい。

(2) $(1, 0) \not\sim_f (2, 5)$ であることを示しなさい。

(3) $(1, 0) \sim_f (a, b)$ となるような $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ をすべて求めなさい。

問題 13.6. (再) $f:\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto x^2+y^2 \in \mathbb{R}$ に対して、

(1) $(1,0) \sim_f (0,-1)$ であることを示しなさい。
(2) $(1,0) \not\sim_f (2,5)$ であることを示しなさい。
(3) $(1,0) \sim_f (a,b)$ となるような $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ をすべて求めなさい。

問題 13.7. $f:\mathbb{R} \ni t \mapsto (\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{R}$ に対して、

(1) $0 \sim_f 2\pi$ であることを示しなさい。
(2) $0 \not\sim_f \pi$ であることを示しなさい。
(3) $0 \sim_f a$ となるような $a \in \mathbb{R}$ をすべて求めなさい。
(4) $a \sim_f b$ となるための $a,b \in \mathbb{R}$ の条件はなんだろうか。

問題 13.8. $X=$ (平仮名の全体のなす集合), $y=$ (アルファベット小文字全体のなす集合), $f:X \to Y$ を $x \in X$ に対して、x をローマ字小文字表記 (ヘボン式) した時の最後の文字に写すことにより定める。このとき、

(1) あなたの自由に選んだ平仮名 5 文字 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 について、$f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), f(x_5)$ を求めなさい。
(2) 「あ $\sim_f$ た」 であることを示しなさい。
(3) 「い $\not\sim_f$ た」 であることを示しなさい。
(4) $\sim_f$ に関して同じクラスであるための条件を簡潔に述べなさい。
(5) 商集合 $X/\sim_f$ の元の個数 $\#(X/\sim_f)$ はいくつか。

問題 13.9. $X=\mathbb{Z}_{>0}$, $Y=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ とし、$f:X \to Y$ を、$f(x)=$ (x を 10 で割った余り) で定義する。このとき、

(1) あなたの自由に選んだ正の整数 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 について、$f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), f(x_5)$ を求めなさい。
(2) $75 \sim_f 55$ であることを示しなさい。
(3) $85 \not\sim_f 1018$ であることを示しなさい。
(4) $\sim_f$ に関して同じクラスであるための条件を 10 進数による表記をもちいて簡潔に述べなさい。
(5) $x \sim_f y$ と $x-y \in 10\mathbb{Z}$ は同値であることを示しなさい。
(6) 商集合 $X/\sim_f$ の元の個数 $\#(X/\sim_f)$ はいくつか。