論理と集合要約 NO.6

第 6 回目の主題：集合の演算

正の実数 r に対して、$B_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 < r^2\}$, $\bar{B}_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 < r^2\}$ とおく。

問題 6.1.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(0,n) = (0,+\infty)$$

であることを示しなさい。

問題 6.2.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(0,\frac{1}{n}) = \emptyset$$

であることを示しなさい。

問題 6.3.

$$\bigcap_{\epsilon>0}(-\infty,1+\epsilon) = (-\infty,1]$$

であることを示しなさい。

問題 6.4.

$$\bigcap_{\epsilon>0} B_{1+\epsilon} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \leq 1\}$$

が成り立つことを示しなさい。

$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ にたいし、そのノルムを

$$||v|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

で定義する。このとき、$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ にたいして、

$$||v+w|| \leq ||v|| + ||w||$$

がなりたつ。(三角不等式。)

一般に、$a \in \mathbb{R}^n$ と $r > 0$ に対して、

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n; ||x-a|| < r\}$$

(a を中心とする半径 r のボール。) とおく。

問題 6.5. $v \in \mathbb{R}^n$ のノルムを R とおくと、

$$B_r(v) \subset B_{(R+r)}(0)$$

が成り立つことを証明せよ。

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 U は

$$\forall x \in U \exists r \in \mathbb{R}_{>0} B_r(x) \subset U$$

を満たすとき、(通常位相に関して) **開集合**であると呼ばれる。開集合とは、「境界を含まない集合」ということの数学的な表現である。

「境界」という言葉自体も数学的に表現できるが、ここではそこまでは踏み込まないことにする。

問題 6.6. 開球 $B_1(0)$ は開集合であることを示しなさい。

問題 6.7. 閉球 $\bar{B}_1(0)$ は開集合ではないことを示しなさい。

問題 6.8. $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $\{(x,0); x \in \mathbb{R}\}$ は開集合ではないことを示しなさい。