

定理 13.1 (最大値の定理). 有界閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数は必ず最大値を持つ。

この定理は位相空間論においては「コンパクト集合の像はコンパクトである」という定理 (あるいはその系の「コンパクト集合上の連続関数は最大値を持つ」という定理) に一般化される。

以下は連続関数の諸性質の復習にあてる。

問題 13.1. $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R}$ は連続であることを証明しなさい。(ヒント: 直接証明、もしくは $|x| = \sqrt{x^2}$ と前回の結果を用いよ。)

問題 13.2. 閉区間 $[a, b]$ 上の実数値連続関数 f に対し、 $|f|$ は $[a, b]$ で最大値を持つことを証明せよ。