微分積分学概論 AI 要約 NO.11

次の定理と補題の証明が残っていた:

定理 11.1. $\mathbb{R}$ の部分集合 X で定義された関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が与えられているする。このとき, $a \in X$ に対して、次の条件は同値である。

(1) f は a で連続である。
(2) X の元ばかりからなる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ を満たすものに対して、常に $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ が成り立つ。

補題 11.2. 数列 $\{a_n\}$ について、次のことが成り立つ。

(1) $\{a_n\}$ がある値 c に収束すれば、そのどの部分列も c に収束する。
(2) 逆に、$\{a_n\}$ のどの部分列も収束するならば、$\{a_n\}$ 自身も収束する。

連続関数の性質

定義 11.3. $\mathbb{R}$ の部分集合 D 上で定義された f が D で連続であるとは、その定義域の全ての点 a で連続であること、すなわち、

$$\forall a \in D \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0; \forall x \in D\, (|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon)$$

が成り立つときに言う。

定理 11.4 (“定理 13”)**.** 同じ定義域 D で連続な関数 f, g について、

(1) $f + g$ も D 上の連続関数である。
(2) fg も D 上の連続関数である。

上の定理は、下の定理の多変数版を用いるともっと鮮やかに証明される

定理 11.5. 二つの連続関数の合成関数は連続である。

系 11.6. (1) x の多項式で定義される関数 (多項式関数) は $\mathbb{R}$ で連続である。

(2) x の有理式で定義される関数

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \qquad (p, q \text{ は } x \text{ の多項式})$$

(有理関数) は、$D_q = \{x \in \mathbb{R}; q(x) \neq 0\}$ で連続である。

次のことは、「連続 $\implies$ グラフがつながっている」ということの表現法の一つと言える。

定理 11.7 (“教科書定理 14”, 中間値の定理)**.** 関数 f が閉区間 $[a, b]$ で連続 (すなわち、$[a, b]$ の各点で連続) とする。このとき $f(a)$ と $f(b)$ の中間の値 γ にたいして、$f(c) = \gamma$ をみたすような $c \in [a, b]$ が存在する。

上の定理は、位相空間論において「連結集合の連続像は連結である」という定理に一般化される。(区間は実数直線の連結部分集合として特徴づけることができる。)

問題 11.1. 閉区間 $[0, 1]$ 上で定義された 2 つの実数値連続関数 f, g が、

$$f(0) > g(0), \qquad f(1) < g(1)$$

を満たすとき、$f(t) = g(t)$ をみたす $t \in [0, 1]$ が存在することを示しなさい。

(定理の内容及びその証明を使ってもよい。)