関数の連続性の定義

定義 10.1 (“§4 (I)”)**.** f は実数 a の近くで定義された関数であるとする。このとき、f が a で連続であるとは、

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

がなりたつときにいう。

極限の定義により、上の定義は次のように言い換えられる。

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0;\ (0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon)$$

$x = a$ の場合を考慮に加えると、次のような定理がなりたつことがわかる。

定理 10.2. f は実数 a の近くで定義された関数であるとする。このとき、f が a で連続であることは、次の条件と同値である。
$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; (|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon)$

上の定理は「定理」ではあるが、連続性の定義における “$x = a$” の「例外的な扱い」を取り除いてむしろ自然な形をしている。そこでこの講義ではもっぱら連続性を確かめるには上の定理のほうを用いて判定することにする。実際には、関数 f が a の近くで定義されているという前提条件は強すぎる。そこで定義域についての条件をハッキリ記述して次のように定義しよう。

定義 10.3. $\mathbb{R}$ の部分集合 X で定義された関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が点 $a \in X$ において連続であるとは、

$$\boxed{(☆)\ \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x \in X(|x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon)}$$

を満たすときに言う。

X を明示することにより、x の動く範囲に関する制限が明確になる。とくに X が $[a, a + \epsilon)$ のときを考えれば「右連続性」(“§4(I)”) が自然に解釈できる。

上の定義で、 $|x - a|$ は x と a の距離、 $|f(x) - f(a)|$ は $f(x)$ と $f(a)$ の距離であることに注意する。上の連続性の定義は多変数関数や、距離空間のあいだの写像の連続性の定義にそのまま一般化することができる。

(☆) の否定、すなわち、 「f が a で連続でない」ことは、次のように書き表すことができる。

$$\boxed{(★)\ \exists \epsilon > 0; \forall \delta > 0 \exists x \in X\ (|x - a| < \delta \text{ かつ } |f(x) - f(a)| \geq \epsilon)}$$

この講義では三角関数については完全な取り扱いができない予定なので、例題やレポート問題においてはいくつかのことは高校までの知識を援用して、証明なしに用いることにする。ただし、それぞれの段階でどのようなことを使ったかは明確にしておきたい。

例題 10.4. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & (x \neq 0 \text{ のとき }) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき }) \end{cases}$$

で定義するとき、 f は $x = 0$ で連続ではないことを証明しなさい。ただし、sin の $0, \pi, \frac{\pi}{2}$ での値や、sin が周期 2π の周期関数であることを自由に使って良いものとする。

定理 10.5. $\mathbb{R}$ の部分集合 X で定義された関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が与えられているする。このとき, $a \in X$ に対して、次の条件は同値である。

(1) f は a で連続である。
(2) X の元ばかりからなる数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ を満たすものに対して、常に $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(a)$ が成り立つ。

問題 10.1. 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin(1/x) & (x\neq 0 \text{ のとき }) \\ 0 & (x=0 \text{ のとき }) \end{cases}$$

で定義するとき、 f は $x=0$ で連続であることを証明しなさい。ただし、$-1\leq\sin(x)\leq 1$ であることを自由に使って良いものとする。

補遺: 部分列について

数列の収束について、次のことを補足しておく。

補題 10.6. 数列 $\{a_n\}$ について、次のことが成り立つ。

(1) $\{a_n\}$ がある値 c に収束すれば、そのどの部分列も c に収束する。

(2) 逆に、$\{a_n\}$ のどの部分列も収束するならば、$\{a_n\}$ 自身も収束する。

余力のある人は、(2) において、「部分列の収束先がどれでも一緒である」と仮定しなくても良いところにも注目すると良い。