## 関数の極限値

今回から、関数の話に話題の重点をうつす。

**定義 8.1.** 集合 $D$ と $T$ とが与えられているとする。集合 $D$ 上の各元 $x$ に対して、それに対応する元 $f(x) \in T$ が (誰が見てもはっきりと) 与えられているとき、$f$ を $D$ から $T$ への**写像** (もしくは**関数**) とよぶ。

関数と写像は同じものであるが、関数という言葉は $T$ が数の集合の部分集合の時に言うことが多い。

これから、「$a$ の近くで定義されている (実数値) 関数 $f$ 」という言い方をもちいることがある。これは、次の二つの状況が同時に満足されていることを言い表す言葉である。

(1) $f$ は $\mathbb{R}$ のある部分集合 $S$ 上定義されている関数 $(f : S \to \mathbb{R})$ である。
(2) $S$ は $a$ を含むある開区間 $I$ を部分集合として含む

**定義 8.2** ( "p.18 (II) 冒頭" )**.** $f$ は実数 $x_0$ の近くで定義された関数であるとする。このとき、$x$ が $x_0$ に近づくときの $f(x)$ の**極限値** は $A$ である (「$x \to x_0$ のとき $f$ は $A$ に収束する」とも言う) とは、

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0; (0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - A| < \epsilon)$$

が満たされるときに言う。

($x \to x_0$ の過程において、「$x = x_0$ を許さない」というのが一つのポイントである。これは、

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} = \cos(x_0)$$

のような不定形の極限を相手にすることが多いからである。)

**補題 8.3.** 上の定義の状況のもとで、関数 $f(x)$ の $x$ が $x_0$ に近づくときの極限値は存在するとすれば唯一つである。

**定義 8.4.** $f(x)$ の $x \to x_0$ の極限を (それがもし存在すれば、)

$$\lim_{x\to x_0} f(x)$$

とかく。

**定理 8.5** ("定理 10")**.** 極限 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ と $\lim_{x\to x_0} g(x)$ がともに存在すると仮定する。このとき、次のことが成り立つ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x).$
(2) $\displaystyle\lim_{x\to x_0} cf(x) = c \lim_{x\to x_0} f(x).$
(3) $\displaystyle\lim_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right).$
(4) さらに、 $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq 0$ と仮定すると、

$$\lim_{x\to x_0} (g(x)/f(x)) = \left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) / \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right).$$

**問題 8.1.** $f(x) = x^2 + 5x + 7$ とおく。このとき $\lim_{x\to 3} f(x) = 31$ であることを定義に基づいて (定理 8.5 を用いずに) 証明しなさい。