# 微分積分学概論 AI 要約 NO.3

第 3 回目の主題：$\boxed{\text{数列の収束の定義}}$
いよいよ収束性の定義を述べよう。

**定義 3.1.** 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 $c$ に**収束する**とは、

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{Z}_{>0} \forall n \in \mathbb{Z}(n > N \implies |a_n - c| < \epsilon)$$

がなりたつときに言う。

この定義が使いこなせるようになれば、この講義の目標の 80% は達せられたと言って良い。

**例題 3.2.** 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ が } 10 \text{ の倍数のとき} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

で定義するとき、$\{a_n\}$ は何かある値に収束するだろうか。定義に基づいて理由を述べて答えなさい。

**解答．** <u>収束しない。</u>
(証明) 背理法で、$\{a_n\}$ がある数 $c$ に収束したとする。収束の定義の $\epsilon$ として $\frac{1}{2}$ を採用しよう。ある $N_0$ が存在して、

(※) $$n > N_0 \text{ならばいつでも } |a_n - c| < \frac{1}{2}$$

が成り立つはずである。そこで

(sample i) 上の $n$ として $N_0$ より大なる 10 の倍数、たとえば、$n = 10N_0$ をとると、

$$|1 - c| < \frac{1}{2}$$

がわかり、

(sample ii) 上の $n$ として $N_0$ より大なる数で、10 の倍数でないもの、たとえば、$n = 10N_0 + 1$ をとると、

$$|0 - c| < \frac{1}{2}$$

がわかる。

上の (sample i,ii) をあわせると、

$$1 = |1 - 0| \le |1 - c| + |c - 0| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

となって矛盾である。
よって、$\{a_n\}$ はいかなる値にも収束しない。

**例題 3.3.** 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \begin{cases} 1/n & n \text{ が } 10 \text{ の倍数のとき} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

で定義するとき、$a_n$ は何かある値に収束するだろうか。定義に基づいて理由を述べて答えなさい。

**解答．** <u>$\{a_n\}$ は 0 に収束する</u>

(証明) 与えられた $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ にたいして、$N_0$ として、$1/\epsilon$ より大きい整数を一つとっておく。(そのようなもの (すなわち与えられた実数よりも大きな整数) が存在することは、「アルキメデスの原理」として保証されているが、マアさしあたっては当り前だと思っても良い。)

この $N_0$ が収束の定義の $N$ の役割を果たすことを示そう。実際、$n > N_0$ なる任意の $n$ にたいして、

(case i) $n$ が 10 の倍数なら、

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N_0} < \epsilon$$

(case ii) $n$ が 10 の倍数でないなら、

$$|a_n - 0| = 0 < \epsilon$$

となって、いずれの場合にせよ $|a_n - 0| < \epsilon$ が成り立つからである。

**問題 3.1.** 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2}$$

で定義するとき、$\{a_n\}$ は何かある値に収束するだろうか。定義に基づいて理由を述べて答えなさい。

---

念のためアルキメデスの原理のステートメントを述べておこう。

**命題 3.4** (アルキメデスの原理; ちりも積もれば山となる)**.** 任意の正の数 $c$ (”ちり”) と $M$ (”山”) とに対して、ある正の整数 $N_0$ であって、

$$N_0 c > M$$

を満たすものが存在する。

全体を $c$ で割っておけば、次のように言い換えてもよい: どのような実数に対しても、それよりも大きな正の整数が存在する。