微分積分学概論 AI 要約 NO.1

本講義の目的：$\boxed{\text{極限と連続性の詳論}}$

高校までの数学が「料理を味わう勉強」とするなら、この講義での数学は「料理を作る勉強」である。とは言っても、「野菜を畑で作る」ところから始めると大変なので、ある程度は出来合いのものをもちいる。他方で、「レトルトを温めておしまい」では料理とはよべない。おなじように、高校で習った「中間値の定理」などの定理をここで手ばなしで使ってはいけない。指数関数、対数関数、三角関数等もアウトである。ではどこまで用いいて良いかといえば次のようになる。

> ◎この講義で用いて良いもの (材料):
> 整数、有理数、実数の、和、差、積、商、等号、不等号。
> ◎この講義で作るもの (料理):
> 極限、収束、連続の諸概念。中間値の定理などの連続関数に関する諸定理。

第一回目の主題：$\boxed{\text{数学の表記法}}$

この半年の講義は「無限」をどう扱うかが焦点であると言っても良い。「無限」 を効率よく扱うためには、「集合」をうまく使うことが大事である。

定義 1.1. 以下この講義では次のような記号を用いる。

(1) $\mathbb{Z}$：整数全体のなす集合。
(2) $\mathbb{Q}$：有理数全体のなす集合。
(3) $\mathbb{R}$：実数全体のなす集合。
(4) $\mathbb{C}$：複素数全体のなす集合。

◎集合と、その元との区別が大事。「実数の集合を一つ考える。」というのと、「実数を一つ考える。」というのをよく意識して区別すること。

1.1. 実数の集合の例、上限、上界.

定義 1.2. 実数 a, b について、閉区間 $[a, b]$ と開区間 (a, b) をつぎの式で定める。

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

◎ $[a, b]$ には端点があって、そこでのようすは $[a, b]$ のほかの点のようすと大きく異っている。それに対して、(a, b) の各点はどの点も似ている。

◎ $[a, b]$ には最大元があるが、(a, b) にはない。次の定義を見よ。

定義 1.3. $\mathbb{R}$ の部分集合 A が与えられているとする。 このとき

(1) $a \in \mathbb{R}$ が A の**上界** (upper bound) であるとは、
$$\forall x \in A (x \leq a)$$
(つまり、どの $x \in A$ をもってきても $x \leq a$) が成り立つときに言う。
(2) $a \in \mathbb{R}$ が A の**上限** (supremum) であるとは、A の上界のうち最小のものをいう。

◎ 集合の上界は存在するとは限らない。また、上界が存在したとすると、それはいくつもある。

例 1.4.

$T = \{$ 土佐電鉄 (*) の運賃 $\} = \{100, 180, 190, 260, 340, 380, 400, 440, 470, 500\}$

とおく ((*)2011/4/1 現在)。 このとき、

(1) T の上界としては、1000 がある。これは「土佐電鉄に乗るときは 1000 円あればひとり分のお金は足りる」ことを意味している。
(2) T の上界としては、他にも 500, 一万、十万、951.777.. 等がある。
(3) T の上限は 500 である。

旅行に行くとき、かかる旅費をキッチリ計算して、その分のお金しか持って行かない人は少なかろう。「大体△万円あれば十分」とか見積もる。これが上界の考え方。

例 1.5. (最大値を持たないが上限を持つ集合たち)
(1) $\{\frac{n-1}{n}; n = 1, 2, 3, \ldots\}$ は上限 1 をもつ。
(2) $\{x \in \mathbb{R}; x < 2\}$ は上限 2 を持つ。
(3) $\{x \in \mathbb{Q}; x^2 < 2\}$ は上限 $\sqrt{2}$ を持つ。

定義 1.6. 集合 $A \subset \mathbb{R}$ が**上に有界**であるとは、A が上界を少なくとも一つもつときに言う。

例題 1.7. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$ とおく。このとき

$$S = \{x \in \mathbb{R}; f(x) < 0\}$$

は上界をもつだろうか、

(解答) $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ と因数分解できるので、

$$S = (0, 1) \cup (2, 3)$$

であることがわかる。したがって、 S は上界 10 をもち、上に有界である。

上界は一つ挙げれば十分である。上の例題なら 3 (上限) でも良いし、100 でもよい。f が因数分解できない場合も、つぎのような別解ならうまくいく。

(別解) まず、$M = 100$ とおくと、S の元 s は $s \leq M$ を満たす。なぜなら、もし $s > M$ なる $s \in S$ が存在したとすると、

$$\begin{aligned} f(s) = \quad & s^4 - 6s^3 + 11s^2 - 6\,s \\ & > 100s^3 - 6s^3 + 11 \cdot 0 - 6 \cdot s^3 = 88s^3 > 0 \end{aligned}$$

となって、これは $s \in S$ に反するからである。($s > 1$ のとき $s < s^2 < s^3 < \ldots$ に注意。負の項は多めに見積もり、正の項は控えめに見積もる。) したがって、M は S の上界の一つである。

定義 1.8. 実数 x に対して、その絶対値 $|x|$ を次のように定義する。

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

(ただし平方根は 0 以上のほうを選ぶ。)

上の平方根を使う定義は次のように高次元の空間にも容易に拡張できるという長所を持つ。

$$||(x_1, x_2, \ldots, x_n)|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2}$$

次に出てくる三角不等式も実は高次元の場合にも成り立ち、解析学の基本的な道具として大切である。

定理 1.9. 次の不等式が成り立つ。
(1) $x \in \mathbb{R}$ に対して、 $-|x| \leq x \leq |x|$.
(2) (三角不等式) $x, y \in \mathbb{R}$ に対して、$|x + y| \leq |x| + |y|$.

問題 1.1.

$$S = \{x \in \mathbb{R}; 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 5 < 0\}$$

は上界をもつだろうか、もつ場合には上界を一つ挙げてその理由を説明し、もたない場合にはもたないことの理由を説明せよ。