例題

$\alpha = \sqrt{3} + 2\sqrt{5}$, $\beta = \sqrt{3} - \sqrt{5}$ とおくとき、$c \in \mathbb{Q}$, $c \neq -1, 2$ ならば

$$\mathbb{Q}(\alpha + c\beta) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}).$$

[証明] 次のステップで証明する。

(1) $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 2$.
(2) $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{3})$
(3) $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})] = 2$.
(4) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ は $\mathbb{Q}$ のガロア拡大であって、その拡大次数は 4.
(5) $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ の元 σ は $\sqrt{3}$ の行き先 $\sigma(\sqrt{3})$ ($\sqrt{3}, -\sqrt{3}$ の二通り。) と $\sqrt{5}$ の行き先 $\sigma(\sqrt{5})$ ($\sqrt{5}, -\sqrt{5}$ の二通り) により定まる。しかも、それら ($2 \times 2 =$) 4 通りの組み合わせはすべてガロア群の元として現れる。
(6) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ の $\mathbb{Q}$ ベクトル空間としての基底として $\{1, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{15}\}$ を取ることができる。
(7) $c \neq -1, 2$ なら、 ガロア群 $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ の元で、$\alpha + c\beta$ を動かさないものは、ガロア群の単位元 (恒等写像) に限る。

上のように、ガロア理論を知った上でなら、次の補題の内容が分かりやすくなる。(この補題自体は、ガロア理論の構築そのものに必要であったので、ガロアの基本定理 (ガロア対応) を用いずに証明する必要があった。)

補題 15.1 (補題 7.8 再掲)**.** K は無限個の元を持つ体とする。K 上の代数的な元 α, β が、ともに K 上分離的ならば

$$K(\alpha, \beta) = K(\alpha + c\beta)$$

をみたす $c \in K$ が少なくともひとつ存在する。