

今日のテーマ: ガロア対応の例

次の補題にあたる内容が残ってしまっていた。

補題 11.1. 体 K の有限次ガロア拡大体 L と、ガロア群 $G = \text{Gal}(L/K)$ の部分群 H が与えられたとする。このとき、 H に関する不変体 L^H について、

$$[L : L^H] = |H|$$

が成り立つ。

以下ガロア対応の例を挙げよう。

例 11.2. $L = \mathbb{Q}(\sqrt{19}), K = \mathbb{Q}$.

$$G = \text{Gal}(L/K) \cong C_2$$

G の部分群は G と $\{e\}$ の二つしかなく、それらに対応する中間体はそれぞれ順に K, L である。

例 11.3. $L = \mathbb{Q}(\sqrt{11} + \sqrt{13}), K = \mathbb{Q}$.

$$G = \text{Gal}(L/K) \cong C_2 \times C_2$$

G の部分群は G と $\{e\}$ のほかに 3 つある。それらに対応する中間体は

$$\mathbb{Q}(\sqrt{11}), \quad \mathbb{Q}(\sqrt{13}), \quad \mathbb{Q}(\sqrt{11 \cdot 13}).$$

例 11.4. $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{11}, \omega), K = \mathbb{Q}$. ($\omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$).

$$G = \text{Gal}(L/K) \cong \mathfrak{S}_3 \quad (3 \text{ 次の対称群})$$

G の部分群は G と $\{e\}$ のほかに:

- 位数 2 のもの 3 つ。
- 位数 3 のもの 1 つ。

それらに対応する中間体は

- $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{11}), \mathbb{Q}(\sqrt[3]{11}\omega), \mathbb{Q}(\sqrt[3]{11}\omega^2)$.
- $\mathbb{Q}(\omega)$.

問題 11.1. $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}, \sqrt{-1})$ の部分体を二つ以上挙げ、それぞれの \mathbb{Q} 上の拡大次数を求めなさい。