代数学 III 要約 NO.9

今日のテーマ: $\boxed{\text{ガロア拡大とガロア群}}$

補題 9.1. K の代数拡大体 $L = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_t)$ が与えられたとする。$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ のすべての K 上の共役が L 内に存在するならば (すなわち、それらの最小多項式がすべて L 上では一次式の積に分解されるならば)、L は K の正規拡大である。

系 9.2. K の有限次代数拡大体 $L = K(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t)$ が K 上ガロア拡大であるための必要十分条件は、生成元 $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ がすべて K 上分離的であり、なおかつそれらの K 上の共役がすべて L 内に存在することである。

前回、体 K 上の二つの体 L と Ω のあいだの (L から Ω への) K-同型のことを $\mathrm{Hom}_K(L, \Omega)$ と表記したが、これは少し曖昧さがあることに気づいたので、$\mathrm{Hom}_K^{\mathrm{algebra}}(L, \Omega)$ と書くことにする。(Web 版では変更済み。)

定義 9.3. 体 K の有限次ガロア拡大 L に対して、$\mathrm{Hom}_K^{\mathrm{algebra}}(L, L)$ は写像の合成について群をなす。この群を L の K 上の**ガロア群**とよび、

$$\mathrm{Gal}(L/K)$$

で書き表す。

体の有限次ガロア拡大が与えられると、ガロア群がひとつ定まる。この群を詳しく調べることにより、体の拡大の様子が手に取るようにわかる。これがガロア理論の真骨頂である。

ガロア群を計算するときには、

(1) ガロア群の元になりそうなものをすべて挙げる。
(2) それらがガロア群の元になるか、それらで足りているかを元の数の勘定で確認する。

のステップで行うことが多い。その意味で次の命題は基本的である。

命題 9.4. 体 K の有限次ガロア拡大 L に対して、

$$|G| = [L : K]$$

例 9.5. $\mathbb{Q}(\sqrt{11})$ は $\mathbb{Q}$ 上のガロア拡大であって、そのガロア群の元は $\sqrt{11}$ の行き先 ($\sqrt{11}$ or $-\sqrt{11}$) で定まる。その結果、

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{11}))/\mathbb{Q}) \cong C_2$$

(2 次の巡回群)

例 9.6. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ は $\mathbb{Q}$ 上のガロア拡大であって、そのガロア群の元は $\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ の行き先 (それぞれ $\sqrt{2}$ or $-\sqrt{2}$ と $\sqrt{3}$ or $-\sqrt{3}$) で定まる。その結果、

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}))/\mathbb{Q}) \cong C_2 \times C_2$$

(2 つの 2 次の巡回群の直積。)

問題 9.1. $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ を求めよ。