- 持ち込みは他人の迷惑になるもの以外何でも可である。

問題 16.1. $\mathbb{Z}$-加群 $M_0 = \mathbb{Z}/42\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$-加群として巡回加群とは同型ではないことを示しなさい。(ヒント: 巡回加群とは $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の形の加群のこと。もし仮にこれが M_0 と同型だとすると、xxx の関係から $m = ...$ でなければならない。)

問題 16.2. $\mathbb{Z}/221\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/209\mathbb{Z}$ はある有限巡回加群と同型だろうか。理由 (証明) をつけて述べなさい。

問題 16.3. 行列 L を、

$$L = \begin{pmatrix} 66 & 40 \\ 78 & 48 \end{pmatrix}$$

で定義し、$\mathbb{Z}$ 加群 $M_1 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ から $M_2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ への準同型写像 $f : M_1 \to M_2$ を

$$f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = L \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

で定めて、$N = M_2/f(M_1)$ とおく。一般に、M_2 の元 x の N でのクラス (剰余類) を $[x]$ と書こう。 このとき、

(1) M_2 の元 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の N でのクラス $m_1 = [e_1]$ と $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の N でのクラス $m_2 = [e_2]$ とは相異なることを示しなさい。

(2) N の元の等式 $6(5m_1 + 7m_2) = 0, 8(2m_1 + 3m_2) = 0$ を示しなさい。

(3) $\mathbb{Z}$ 加群 W の元 w_1, w_2 が、

$$6(5w_1 + 7w_2) = 0,$$
$$8(2w_1 + 3w_2) = 0$$

を満たすとする。このとき、

$$66w_1 + 78w_2 = 0,$$
$$40w_1 + 48w_2 = 0$$

が成り立つことを示しなさい。

(4) N を巡回加群の直和として表現しなさい。

解答編

問題 16.1. $\mathbb{Z}$-加群 $M_0 = \mathbb{Z}/42\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$-加群として巡回加群とは同型ではないことを示しなさい。(ヒント: 巡回加群とは $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の形の加群のこと。もし仮にこれが M_0 と同型だとすると、xxx の関係から $m = ...$ でなければならない。)

解答 . もし仮に $M_0 = \mathbb{Z}/42\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$ が巡回加群と同型だとすると、位数の関係から $M_0 \cong \mathbb{Z}/1470\mathbb{Z}$ でなければならない。とくに M_0 には 1470 倍して初めて 0 になる元 $[1]_{1470}$ が存在することになる。ところが M_0 の任意の元 x は $210x = 0$ をみたすからこれは不可能である。

問題 16.2. $\mathbb{Z}/221\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/209\mathbb{Z}$ はある有限巡回加群と同型だろうか。理由 (証明) をつけて述べなさい。

解答 . 同型である。準同型写像

$$f : \mathbb{Z} \ni n \mapsto ([n]_{221}, [n]_{209}) \in \mathbb{Z}/221\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/209\mathbb{Z}$$

に対して準同型定理を適用すればわかる。

問題 16.3. 行列 L を、

$$L = \begin{pmatrix} 66 & 40 \\ 78 & 48 \end{pmatrix}$$

で定義し、$\mathbb{Z}$ 加群 $M_1 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ から $M_2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ への準同型写像 $f : M_1 \to M_2$ を

$$f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = L \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

で定めて、$N = M_2/f(M_1)$ とおく。一般に、M_2 の元 x の N でのクラス (剰余類) を $[x]$ と書こう。 このとき、

(1) M_2 の元 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の N でのクラス $m_1 = [e_1]$ と $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の N でのクラス $m_2 = [e_2]$ とは相異なることを示しなさい。
(2) N の元の等式 $6(5m_1 + 7m_2) = 0, 8(2m_1 + 3m_2) = 0$ を示しなさい。
(3) $\mathbb{Z}$ 加群 W の元 w_1, w_2 が、

$$6(5w_1 + 7w_2) = 0,$$
$$8(2w_1 + 3w_2) = 0$$

を満たすとする。このとき、

$$66w_1 + 78w_2 = 0,$$
$$40w_1 + 48w_2 = 0$$

が成り立つことを示しなさい。
(4) N を巡回加群の直和として表現しなさい。

解答．

(1) $[e_1]=[e_2]$ であるとすると、$e_1-e_2\in f(M_1)$ となる。すなわち、ある $a,b\in\mathbb{Z}$ が存在して、

$$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=L\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\tag{16.1}$$

がなりたつ。ところがこれを有理数の範囲で解くと、

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11/6\\-3\end{pmatrix}.$$

が (16.1) の唯一の解であることがわかる。すなわち、(16.1) をみたす整数 a,b は存在しない。これは矛盾である。(本問と (2) とを効率よく求めるためには L^{-1} を計算しておけばよい。)

(2)

$$6\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}=L\begin{pmatrix}-5\\9\end{pmatrix},\quad 8\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=L\begin{pmatrix}-4\\7\end{pmatrix}$$

という関係式が存在するからである。

(3) 以下、行列による略記法を用いよう。わかりにくい場合には適宜成分ごとに書いてみると良い。

$$B=\begin{pmatrix}30&16\\42&24\end{pmatrix}(=\begin{pmatrix}5&2\\7&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&0\\0&8\end{pmatrix})$$

とおくと、

$$(w_1\ w_2)B=0$$

である。

$$L=BC\qquad (C=\begin{pmatrix}7&4\\-9&-5\end{pmatrix})$$

であるから、

$$(w_1\ w_2)L=(w_1\ w_2)BC=(0\ 0)C=0$$

(4) N の 生成元として $m_1=[e_1],m_2=[e_2]$ を取ることができる。その基本関係式は (行列記法を用いて略記すると)

$$(m_1\ m_2)L=(0\ 0)$$

である。この関係式を簡単にしよう。(2),(3) により、(あるいは、$\det(C)=1$ で C が $M_2(\mathbb{Z})$ の可逆元であることにより、) 上の関係式は

$$(m_1\ m_2)B=(0\ 0)$$

と同値である。他方

$$(m_1'\ m_2')=(m_1\ m_2)\begin{pmatrix}5&2\\7&3\end{pmatrix}$$

は基本変換の一つであり、上記関係式を m_1',m_2' で書けば、

$$6m_1'=0,\quad 8m_2'=0$$

であることがわかる。すなわち、

$$N\cong\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}.$$

[本問のキーになるのは、(2) の解答のところの等式をひとつにまとめた

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} (= B) = L \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$$

があって、この式に登場する

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} (= C^{-1})$$

の二つの行列は整数係数の逆行列をもつという部分である。]