

## 代数学 II 試験予想問題

- 持ち込みは他人の迷惑になるもの以外何でも可である。
- この予想問題と全く同じ問題は出ない。
- 知識のみの解答はほとんど0点に近いことを覚悟すること。例えば下の問題 15.1 の解答として「8 と 6 とが互いに素ではないから」と書いても (その事自体は正しいが、) ほとんど点にはならない。

問題 15.1.  $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  と  $\mathbb{Z}/48\mathbb{Z}$  とは加群として同型ではないことを示しなさい。

問題 15.2.  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  と  $\mathbb{Z}/42\mathbb{Z}$  とは加群として同型であることを示しなさい。

問題 15.3.  $\mathbb{C}[X]$ -加群として  $\mathbb{C}[X]/(X^2 - 1) \cong \mathbb{C}[X]/(X - 1) \oplus \mathbb{C}[X]/(X + 1)$  であることを示しなさい。

問題 15.4.  $\mathbb{Z}$  加群  $M_1 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  から  $M_2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  への準同型写像  $f: M_1 \rightarrow M_2$  を

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

で定めて、 $N = M_2/f(M_1)$  とおく。 $M_2$  の元  $m$  の  $N$  でのクラス (剰余類) を  $[m]$  と書こう。このとき、

- (1)  $M_2$  の元  $m$  で、 $[0] = [m]$  となるものの例を 5 個挙げよ。
- (2)  $M_2$  の元  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  と  $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  とは  $N$  において同じクラスではない (すなわち、 $[e_1] \neq [e_2]$  である) ことを示しなさい。
- (3) (上級者向け)  $N$  を巡回加群の直和として表現しなさい。