代数学 II 要約 NO.14

今日のテーマ: $\boxed{\text{群の表現と加群の理論}}$

定理 14.1 (マシュケの定理 (を加群の言葉で述べたもの))**.** 体 k と有限群 G が与えられていて、G の位数 g と k の標数 p とは互いに素であると仮定する。このとき、$k[G]$-加群の短完全列は必ず分裂する。

証明は g の k-加群としての section を G の作用でもって「 平均を取る」ことにより得られる。

問題 14.1. 有限群 G にたいして、$\Psi : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}$ を、 $\Psi(\sum_g a_g \cdot g) = \sum_g a_g$ で定める。

(1) Ψ は $\mathbb{C}[G]$-加群の準同型であることを示しなさい。ただし、$\mathbb{C}$ には G は自明に作用する (すなわち、$g.c = c \quad \forall g \in G \forall c \in \mathbb{C}$)) ものとする。

(2) Ψ の核 を K と置く。このとき、$\mathbb{C}[G]$-加群の短完全列

(**) $$0 \to K \to \mathbb{C}[G] \xrightarrow{\Psi} \mathbb{C} \to 0$$

の分裂を与えるような Ψ の section $\sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}[G]$ をひとつ与えよ。(わかりにくい場合には $G = C_3$ の場合のみに解答を書いても良い)

補足 1.

補題 14.2. 環 A が与えられたとき、

(1) A-左加群 M, N にたいして、M から N への A-準同型の全体

$$\mathrm{Hom}_A(M, N)$$

は加群の構造を持つ。

(2) さらに A が可換なら、$\mathrm{Hom}_A(M, N)$ は A-加群の構造を持つ。

* 一般に、 $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ は A の中心 $Z(A)$ の上の加群と見ることができる。その他、 M, N が特殊なものの場合には、$\mathrm{Hom}_A(M, N)$ にエクストラな構造が入ることがある。例えば、A が可換でなくても $\mathrm{Hom}_A(M, A)$ は A-右加群の構造を持つ。

日程:

◎今日以の講義終了後は、特例欠席など特別の理由のあるものを除き、No.14 のレポート以外は受け取りません。

7/23 高知大学的月曜日のため代数 II の講義はない。

7/30 本講義の最後 (補足事項など)。

8/6 試験