

今日のテーマ: 「群の表現」の定義、正則表現

環 A と有限群 G が与えられているとき、群環 $A[G]$ が定義されることはすでに定義 3.4 で示した。

実は、 G は $A[G]$ 自体の上に表現できる。このことを、とくに R が体 K のときに詳しく見てみることにする。

定義 12.1 (定義 3.5). 可換体 K 上の G の n -次元表現 Φ とは、 G から $\mathrm{GL}_n(K)$ への群準同型のことをいう。

K 上の G の n -次元表現 Φ が決まると、 $K[G]$ の $V = K^n$ への作用が命題 3.6 のように定まって、 V は $K[G]$ -加群の構造を持つ。逆に、 K -上有限次元の $K[G]$ -加群 V_1 が与えられれば、(すなわち、 K -ベクトル空間 V_1 上に G の作用が定まっていれば、) その基底を固定することにより、 G の表現が定まることが容易に分かる。行列を書くよりもその方が簡明であることが多いので、以下では多くの場合 $K[G]$ の作用をもって表現を定義する。

補題 12.2. 有限群 G と体 K が与えられているとする。 $K[G]$ 自身は $K[G]$ 上の左加群とみなすことができる。この表現 λ を G の左正則表現と呼ぶ。

厳密に言えば、 G の元にどのように順番を付けるかによって G の各元を表す行列は違ってくる。ここでは G の元の順番は適当に付けて、それを明示した上で行列で表現することにする。

問題 12.1. 4 つの元の偶置換全体のなす群 \mathfrak{A}_4 の正則表現で、 $(1\ 2\ 3)$ および $(1\ 2)(3\ 4)$ に対応する行列を書き下しなさい。(\mathfrak{A}_4 の元の順番を明示しておくこと。)

問題 12.2. 位数 $2n$ の二面体群

$$\mathbb{D}_{2n} = \langle a, b; a^n = e, b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$$

の正則表現で、 $n = 2, 3$ の場合 (できれば、もっと一般の場合も) a, b に対応する行列はどのようなか答えなさい。(二面体群については、すでに二年生段階で習っているはずなので、本問では詳しくは述べない。)