代数学 II 要約 NO.9

第 9 回目の主題：$\boxed{\text{環の直積とその上の加群}}$

前回までに、可換 PID A 上の有限生成加群は A 上の巡回加群の直和であることを示した。今回は A の元の「素元分解」を用いてその構造をもう少し細かく吟味しよう。

定義 9.1. 環 A にたいして、

$$Z(A) = \{z \in A; zx = xz \qquad \forall x \in A\}$$

は A の部分環をなす。これを A の**中心**とよぶ。

環の直積分解においては、二つの基本的な元が重要な役割を果たす。

補題 9.2. (直積分解と中心的射影の関係)

(1) A_1, A_2 は単位元をもつ環であるとする。このとき $A_1 \times A_2$ の元 e_1, e_2 を、$e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$ によって定めると、e_1, e_2 は A の中心に属し、なおかつ次のことが成り立つ。

(*) $$e_1^2 = e_1, e_2^2 = e_2, e_1 + e_2 = 1, e_1 e_2 = 0$$

(2) A は単位元をもつ可換環であるとする。もし A の中心に属する元 e_1, e_2 で、(*) を満たすものが存在すれば、A は $A/(e_2) \times A/(e_1)$ と 同型になる。

上の補題により、環を直積分解したいときには、(*) を満たす元 e_1, e_2 を探せばいいことがわかる。e_1, e_2 のことを (直積分解に対応する) **中心的射影**と呼ぶ。実際には、次の補題のように、中心的射影を一つ見つければその相棒は自動的に見つかる。

補題 9.3. 環 A の中心に属する元 e が、ベキ等 ($e^2 = e$) ならば、$e_1 = e, e_2 = 1 - e$ は (*) をみたす。

可換 PID A の元 x が二つの「互いに素な」元の積であるとき、剰余環 A/Ax の直積分解が次のように書ける。

命題 9.4. A が可換 PID で、$Aa + Ab = A$ をみたすとき (つまり a, b が「互いに素」であるとき)、

(1) 環としての同型

$$A/Aab \cong (A/Aa) \times (A/Ab)$$

が存在する。

(2) 上の同型はまた A-加群としての同型

$$A/Aab \cong (A/Aa) \oplus (A/Ab)$$

ともみなせる。

環としての直積 $(A/Aa) \times (A/Ab)$ と A-加群としての直和 $(A/Aa) \oplus (A/Ab)$ とは集合としては全く同じモノである。本講義では一応区別して書くが、教科書等では二つとも直和の記号 $\oplus$ で書かれることも多い。

系 9.5. m, n が互いに素な正の整数のとき、($\mathbb{Z}$-) 加群の同型

$$\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

が存在する。

上の系と有限生成アーベル群の基本定理により次の系が成り立つことがわかる。

系 9.6. 任意の有限生成アーベル群は、つぎの形のアーベル群の幾つかの直和に同型である。

(1) 無限巡回群 $\mathbb{Z}$.

(2) $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \qquad$ (p は素数。n は正の整数。)

同様にして、次の命題が成り立つことがわかる。(一般に、可換 PID の元に対しては素因数分解が一意的に存在するということに注意しておく。)

命題 9.7. 可換 PID A に対して、有限生成アーベル A 加群は、つぎの形の A-加群の幾つかの直和に同型である。

(1) A 自身 (を A 加群とみたもの。)
(2) A/p^nA 　　(p は A の素元。 n は正の整数。)

一般に、環 A に中心的射影 e が存在すると、A 上の加群も次のような分解を受ける。

命題 9.8. 環 A の中心的射影 e が与えられたとする。このとき、

(1) $eM, (1-e)M$ は M の A-部分加群である。
(2) M は A-加群として直和に分解される: $M \cong eM \oplus (1-e)M$.

問題 9.1. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ とは $\mathbb{Z}$-加群として同型ではないことを示しなさい。