代数学 II 要約 NO.8

第 8 回目の主題：$\boxed{\text{PID 上の有限生成加群 (続き)}}$

可換環 A 上の加群 M の元 $m_1, m_2, \dots, m_k$ にたいして、次のような変換を考えていた。

(変換 1) $\{m_1, m_2, m_3, \dots, m_k\}$ の順序を入れ換える。

(変換 2) $\{m_1, m_2, m_3, \dots, m_k\}$ の代わりにそれを $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(A)$ で「ひねった」

$$\{a.m_1 + b.m_2, c.m_1 + d.m_2, m_3, \dots, m_k\}$$

を考える。

(変換 3) $\{m_1, m_2, m_3, \dots, m_k\}$ の代わりに m_1 を

$$m_1' = m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3 + \dots m_k m_k$$

に置き換えたもの $\{m_1', m_2, m_3, \dots, m_k\}$ を考える。

手順 8.1. 可換 PID A と、その上の加群 M が与えられていて、M は A 上 $m_1, m_2, \dots, m_k$ で生成されているとする。$m_1, m_2, \dots, m_k$ を (変換 1), (変換 2), (変換 3) を有限回繰り返して得られる M の生成系の全体を $\mathcal{S}$ とおく。このとき、

(1) 次の操作をストップするまで繰り返し、$\underline{w} = \{w_1, w_2, \dots w_k\} \in \mathcal{S}$ を得る。

(a)

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 \dots + c_k v_k = 0$$

なる関係式をひとつ見つけてくる。このような関係式で非自明なものが存在しないならば M は自由加群である。もし存在するならば、(変換 1)　をくり返して、 $c_1 \neq 0$ としてよい。

(b) 上の v に (変換 1), (変換 2) を繰り返すことにより、$c_1 w_1 = 0$ なる関係式をもつ $\{w_1, w_2, \dots, w_k\} \in \mathcal{S}$ を見つけることができる。

(c) $w_1, w_2, \dots, w_n$ の関係式

$$\sum_j a_j w_j$$

のうち、 a_1 が c_1 で割り切れないものがもしなければ、ここでストップする。あれば、c_1 と a_1 の gcd d_1 にたいして、ある $d_2, d_3, \dots, d_k \in A$ を見つけて、

$$\sum d_j w_j = 0$$

なる関係式を見つけることができる。$\{w_j\}$ を v の代わりに採用して、(1) へ。

命題 7.10 により、以上の操作は必ず有限回でストップする。

(2) この時点で、 $M = Aw_1 \oplus (Aw_2 + \dots + Aw_k)$ と直和分解されるので、$M' = Aw_2, \dots Aw_k$ に対して同様の操作を繰り返す。

上の手順で M を定理 7.4 にあるように直和分解できるが、その際の w は、補題 7.3 の (2) で言われるような極大性の条件を満足するとは限らない。その要求を満たすには次の補題のようなステップが必要になる。応用上は定理 7.4 の形で十分なことが多いので詳細は略す。

補題 8.2. PID 上の加群 M が二つの元 m_1, m_2 で生成されていて、その関係式が、

$$a_1 m_1 = 0, \quad a_2 m_2 = 0$$

で与えられているとき、(言い換えると、$M \cong A/Aa_1 \oplus A/Aa_2$ のとき、) 命題 7.9 のように $d = \gcd(a, b), a', b', x, y$ を選んで、

$$\bar{m}_1 = a_1' m_1 + a_2' m_2, \quad \bar{m}_2 = -y m_1 + x m_2$$

のように変換 (変換 2) を施すと、$\bar{m}_1, \bar{m}_2$ の関係式は

$$d\bar{m}_1 = 0, \quad l\bar{m}_2 = 0 \qquad (l = \mathrm{lcm}(a_1, a_2) = a_1 a_2 / d)$$

であたえられる。

問題 8.1. 命題 7.7 を用いて、可換 PID A 上の有限生成自由加群 F の有限生成部分加群は自由加群であることを示しなさい。