代数学 II 要約 NO.6

第 6 回目の主題：$\boxed{\text{自由加群の間の準同型の例}}$

自由加群から一般の加群への準同型は次のように「生成元の行き先」で定まる。

命題 6.1. 環 A 上の加群 M にたいして、

(1) M の元 $m_1, m_2, \dots, m_k$ が与えられたとき、$A^{\oplus k}$ から M への A-準同型 φ が

$$\varphi(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}) = \sum_{j=1}^{k} a_j.m_j$$

により定まる。

(2) $A^{\oplus k}$ から M への A-準同型は、上のような形のものに限る。

系 6.2. 環 A 上の加群 M にたいして、M が k 個の元 $\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ で生成されるならば、

(1) 上記の命題のようにして全射 A-準同型 $\psi : A^{\oplus k} \to M$ が定まる。

(2) さらに、 $\mathrm{Ker}(\psi)$ も有限個の元で生成されるならば、適当な A 準同型

$$f : A^{\oplus k'} \to A^{\oplus k}$$

があって、M は f の余核 $A^{\oplus k}/\operatorname{Image}(f)$ と同型になる。(このような M のことを有限表示をもつ A 加群という。)

うえのことは、M が適当な有限性の条件を満足すれば (つまり、有限表示を持てば)、M は前回の系 5.9 のような形の準同型の余核として得られることを示している。

A が可換なときには前回の系 5.9 は次のように書ける:

命題 6.3. $A^{\oplus k}$ から $A^{\oplus l}$ への任意の A-準同型 φ は、

$$\varphi(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \dots & & & \\ c_{l1} & c_{l2} & \dots & c_{lk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$$

と書ける。

例 6.4. A-加群 M が 一つの元で生成されている場合、A の左イデアル J があって、$M \cong A/J$ となる。さらに、A が可換で、かつ PID であれば、M は J はやはり一つの元で生成されて、$A \xrightarrow{c\times} A$ の余核 A/cA と同型になる。

問題 6.1. 問題 4.1 は typo があった (web 版では修正済) ので、それを修正したものを改めて解きなさい。