代数学 II 要約 NO.3

第 3 回目の主題：$\boxed{\text{作用}}$

R-加群 M において、R の元の M への作用はベクトル空間で言えば「スカラー倍」に当たる訳だが、実際にはかなり感覚が異なる場合がある。

定義 3.1. (記号の確認) 環 R の単位元を 1_R と書くのであった。その二つの和 $1_R + 1_R$ を 2_R, $2_R + 1_R$ を 3_R 等と書く。 1_R の R におけるマイナス元を $(-1)_R$, その二つの和 $(-1)_R + (-1)_R$ を $(-2)_R$ 等と書く。

例 3.2. (「スカラー倍的な作用」の例)

(1) $\mathbb{Z}$-加群 M に対して、

$$2.m = m + m, \quad 3.m = (m + m) + m, \ldots$$
$$(-2).m = (-m) + (-m), \quad 3.m = ((-m) + (-m)) + (-m), \ldots$$

が成り立つ。

(2) もっと一般に環 R に対して、$2_R.m = m + m, \quad 3_R.m = (m + m) + m$ 等々が成り立つ。

(3) 体 k 上のベクトル空間 V を k-加群とみるときには、「スカラー倍」を作用と考えるのであった。

次に、「スカラー倍」っぽくない作用の例を挙げよう。これらは後でこの講義の重要なテーマとして扱われることになる。

例 3.3. 体 k 上の一つの行列 $A \in M_n(k)$ を固定する。このとき、一変数多項式環 $k[X]$ の $V = k^n$ への作用が

$$p(X).v = p(A)v \qquad (p \in k[X], v \in k^n)$$

で定まる。

問題 3.1. $k[X]$ の k^n への作用であって、k の作用が V の元のスカラー倍に一致するようなものは、上に挙げたものに限ることを示しなさい。

定義 3.4. 環 A と群 G が与えられたとき、A 上の G の **群環** $A[G]$ とは、形式的な有限和の集合

$$A[G] = \left\{ \sum_{g \in G} a_g g \ ; \qquad a_g = 0 \quad \forall' g \in G \right\}$$

に形式的に和、積を導入したものである。(「$\forall' \bullet$」は「有限個の例外を除いて全ての $\bullet$ に対して」という意味である。) 具体的には、和、積は次のように与えられる。

(1) $\sum_g a_g g + \sum_g b_g g = \sum_g (a_g + b_g) g$.

(2) $\sum_g a_g g \cdot \sum_g b_g g = \sum_g (\sum_h a_h b_{h^{-1}g}) g$

定義 3.5. 体 k が与えられているとする。群 G の k 上の n-次線形表現 Φ とは、群準同型 $\Phi : G \to \mathrm{GL}_n(k)$ のことである。

命題 3.6. 群 G の k 上の n-次線形表現 Φ が与えられたとき、$A[G]$ の k^n への作用が

$$(\sum_g a_g g).v = \sum_g a_g \Phi(g) v \qquad (v \in k^n)$$

で定まる。

問題 3.2. 5 次巡回群 $C_5 = \langle a; a^5 = e \rangle$ の上の $\mathbb{C}$ 上の群環 $\mathbb{C}[C_5]$ の次の計算をしせよ。(答はできるだけ簡単にすること。)

$$(e + a + a^2 + a^3 + a^4)(e + a^3)$$