代数学 II 要約 NO.2

第 2 回目の主題：$\boxed{\text{環の上の加群の定義 (2)}}$

環と、その上の加群について、前回は「フォーマルな」定義を述べた。実際には、次のことをわきまえていればそれほど間違えることはない。

(1) 環 A とは、その中で足し算、引き算、かけ算ができるような集合である。
(2) A-加群 M とは、その中で足し算、引き算、および A の元による作用 (「スカラー倍」) ができるような集合である。

例 2.1. 環 A が与えられたとき、正の整数 n にたいし、A の元を n 個縦に並べた「ベクトル」の全体 A^n は A-加群とみなせる。具体的には、

(1) 和

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \pm y_1 \\ x_2 \pm y_2 \\ \vdots \\ x_n \pm y_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \text{複号同順}, \\ \forall x_1, \dots \forall x_n \in A, \\ \forall y_1, \dots \forall y_n \in A. \end{pmatrix}$$

(2) 作用 (スカラー倍)

$$a. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x_1 \\ a \cdot x_2 \\ \vdots \\ a \cdot x_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \forall a \in A, \\ \forall x_1, \dots \forall x_n \in A. \end{pmatrix}$$

上の例で $n = 1$ のときを考えれば、A 自身も A-加群とみなせることがわかる。

定義 2.2. 上の A^n のことを A 上の (階数 n の) **自由加群**と呼ぶ。

論理的には、前回に述べた定義に合うような「和、差、積」をもつ集合は (見掛けがどんなものであっても) 環である。数学者はいろいろな環を発明し、使っている。ただし、一旦ある集合 A が「環であること」がチェックされれば、A の元の和、差、積については通常の「数」に準じた扱いが可能になる。加群についても同様である。例えば次のことが成り立つ。

補題 2.3. 環 A 上の加群 M に対して、つぎのことがなりたつ。

(1) M の ゼロ元は唯一つである。これを 0_M (もしくは単に 0) と書く。
(2) A の任意の元 a にたいして、 $a.0_M = 0_M$ がなりたつ。
(3) M の各元 x にたいして、 x の和に関する逆元 (マイナス元) は唯一つ存在する。これを $-x$ と書くのであった。
(4) A の任意の元 a と、M の任意の元 m にかんして、

$$(-a).(-m) = a.m$$

が成り立つ。

「A 加群 M」を思いうかかべるとき、はじめはベクトル空間をイメージしても良いだろう。ただし、つぎのことがベクトル空間とは決定的に異なる。

(1) 環 A の積は可換とは限らない。(これは A が可換環であるような状況ならば回避できる。)
(2) 環 A の元で割れるとは限らない。

というわけで、加群を学ぶときには、ベクトル空間の性質を思い出しつつ、加群の場合の違いを意識しながら学ぶと良いだろう。

次の定義はベクトル空間の間の線型写像の類似と考えて良い。

定義 2.4. M_1, M_2 が A-加群のとき、写像 $f : M_1 \to M_2$ が **A-準同型** (**A-加群としての準同型**) であるとは、つぎの条件が満足されるときに言う。

(Hom1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$
(Hom2) $f(a.x) = a.f(x)$

定義 2.5. A-加群 M にたいして、 N が M の **A-部分加群**であるとは、次の 2 条件が同時に満足されているときに言う。

(SM1) N は M の部分集合である。
(SM2) N はそれ自身 A-加群の構造をもつ。
(SM3) 包含写像 $j : N \hookrightarrow M$ は A-加群の準同型である。

命題 2.6. A-加群 M と M の部分集合 N にたいして、次の 2 条件は同値である。

(1) N は M の R-部分加群である。
(2) N は和、差、R の元による作用について閉じている。

例 2.7. $3\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}$-部分加群である。

もっと一般に、

定義 2.8. 環 A にたいして、A 自身を A-加群とみなしたものの部分加群 J を A の**左イデアル**と呼ぶ。別の言い方をすると、A の左イデアル J とは、A の部分集合であって、次の条件を満たすもののことである。

(LI1) $0_A \in J$.
(LI2) $x, y \in J \implies x + y \in J, \quad x - y \in J$.
(LI3) $a \in A, x \in J \implies ax \in J$.

A が可換環のときには、左イデアルとイデアルは同じものである。

定義 2.9. R-加群 M とその R-部分加群 N が与えられているとする。このとき M の N による商加群 M/N は自然に R-加群の構造をもつ。

問題 2.1. $\mathbb{Z}$-加群 $\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}$-部分加群 $3\mathbb{Z}$ による剰余加群 $M = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ を考える。M の各元 x は 「11 で割る」ことができること、すなわち、

$$\forall x \in M \exists y \in M; \quad 11.y = x$$

を示しなさい。