解析学 IA NO.10 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ 多変数関数の (リーマン) 積分

$\mathbb{R}^n$ の部分集合 D 上で定義された実数値もしくはベクトル値関数 f に対して、f の D 上の積分 (定積分) は次のように定義される。

(1) D を小さい部分集合 $\{D_j\}$ の和に分ける。
(2) f を 各 D_j 上で定数値関数 c_j で近似する。
(3) 積分値の一つの近似として、$\sum_j c_j\mu(D_j)$ を得る。ただし $\mu(D_j)$ は D_j の体積である。
(4) 細分 $\{D_j\}$ を細かくしたとき、上のような近似が近づく値があるなら、それを $\int_D f$ と定義する。

問題がいくつかある。

(1) 小さい集合 D_j の体積 $\mu(D_j)$ は如何に定義されるだろうか。これには次元 n について帰納的に議論し、$n-1$ 次元の積分で定義するか、もしくは D_j として直方体のような限定的なもののみを扱う方法がある。
(2) D_j として直方体のような限定的なものを使う場合、D をそのようなもので過不足なく覆うことが難しくなる。これには若干の「はみ出し」もしくは「不足部分」を許して、あとでそれらの寄与が十分小さくなることを示す方法がある。
(3) 細分を細かくするとき、はたして本当に和 $\sum_j c_j\mu(D_j)$ は小さくなるだろうか。これは f がどのような関数かによって変わってくる。(コンパクト集合上の連続関数なら各 D_j 上で一様近似できるだろう。)
(4) このような積分は座標の取り方によらないだろうか? (「直方体」は明白に座標の取り方に依存する。すなわち、直方体は座標変換すると別のモノになってしまう。)

リーマン積分はこれらの問題点に解答を与えるが、十分とは言えない。徹底的に解決するためにはルベーグ積分をオススメする。

そうは言っても、「なんでもかんでもルベーグ積分」では成金趣味が見えかくれしてイヤなので、ちょっとぐらいは扱っておこう。

定義 10.1. (1) 区間直方体とは、

$$I = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \dots [a_n, b_n)$$

と表される $\mathbb{R}^n$ の部分集合のことであると決める。

(2) 上の区間直方体の測度とは、

$$\mu(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\dots(b_n - a_n)$$

で定義される数のことであると定義する。

(3) 一般の $\mathbb{R}^n$ の部分集合 S に対して、そのジョルダン外測度とは、「S を有限個の区間直方体 $\{I_1, I_2, \dots, I_k\}$ で覆ったときの直方体の総体積 $\mu(I_1) + \mu(I_2) + \dots + \mu(I_k)$」の《覆いかたに関する下限》として定義する。これを $\mu^+(I)$ と書くことにする。
(4) $\mathbb{R}^n$ の有界な集合 S に対して、S を十分大きな区間直方体 I で覆って、$\mu^+(I) - \mu^+(\complement S)$ を考えると、これは I の取り方によらずに定まる。この値のことを I のジョルダン内測度と呼び、$\mu^-(S)$ と書く。
(5) $\mathbb{R}^n$ の有界な集合 S が、$\mu^+(S) = \mu^-(S)$ を満たすとき、S のことをジョルダンの意味で測度確定という。

命題 10.1. ジョルダンの外測度の定義で、S を覆う区間直方体は互いに交わらないもののみに限定しても結果はおなじである。

上の命題はジョルダン流の、「有限の区間直方体で覆う」から正しい命題で、ルベーグ流の、「可算個で覆う」方法ではもはやなりたたない。

系 10.2. (1) 区間直方体は測度確定であり、$\mu^+(I) = \mu(I)$.
(2) 一般の有界集合 $S \in \mathbb{R}^n$ にたいして、$\mu^+(S) \geq \mu^-(S)$ がなりたつ。

上のことがあるから、S 測度確定の場合に $\mu^+(S)$ のことを単に $\mu(S)$ と書いても差し支えない。

問題 10.1. 平面三角形

$$S = \{(x, y) | 0 \leq x \leq y \leq 1\}$$

を区間長方形で覆って、$\mu^+(S) \geq \frac{1}{2}$ を証明しなさい。

逆写像定理の証明

補題 10.1 (縮小写像の原理)**.** $K \subset \mathbb{R}^n$ 上定義された $\mathbb{R}^n$-値関数 f が**縮小写像**である、すなわち
(S1) $f(K) \subset K$
(S2) $d(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{2} d(x, y)$
を満たすとする。このとき、
(1) f は唯一つの**不動点** $x_0 \in K$ を持つ。(すなわち、$f(x_0) = x_0$).
(2) 任意の $a \in K$ に対して、点列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 0, 1, 2 \ldots)$$

で定義すると、a_n は f の不動点 x_0 に収束する。
(3) K が有界で、$K \subset B_r(0)$ とする。このとき、上記 $\{a_n\}$ に対して、$b_n = a_{n+1} - a_n$ と定義すれば、$b_n \leq \frac{1}{2^n} |2r|$ で、かつ、$x = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} b_j$ がなりたつ。

定理 9.1 の記号でつぎのような計算を行うと、$y \in B_1$ を止めるごとに、$f(y, \bullet)$ が縮小写像であること (したがって補題 9.3 が正しいこと) が言える。$f(B_0) \subset B_0$ も証明すべきだが、それは「練習問題」として残しておこう。(レポート問題ではない。))

$$\begin{aligned}
&||\varphi(y, x_1) - \varphi(y, x_2)|| \\
=&||x_1 - x_2 + L \int_0^1 f'(x_1 + t(x_2 - x_1)) dt \cdot (x_2 - x_1)|| \\
=&|| \int_0^1 (-I + L f'((x_1 + t(x_2 - x_1)) dt \cdot (x_2 - x_1)|| \leq \frac{1}{2} ||x_2 - x_1||
\end{aligned}$$

上の補題の主張 (3) により、補題 9.3 の「各点収束」は実は「一様収束」と言っても正しいことが分かる。連続関数の一様極限は連続であるから、g は連続関数である。g の定義により、$f \circ g = \mathrm{id}$ であることは容易に分かる。あとは研究に任せよう。