# 解析学 IA NO.9 要約

$\boxed{\text{今日のテーマ}}$ 逆写像定理。

**定義 9.1.** (1) $\mathbb{R}^m$ のベクトル $v = (v_1, v_2, \ldots, v_m), w = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$ に対して二つの**内積**を

$$\langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^{m} v_j w_j$$

で定義する。

(2) $\mathbb{R}^m$ のベクトル $v$ の**ノルム**を

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

で定義する。

(3) ($v, w$ のこの講義で用いられる距離 (ユークリッド距離) は $d(v, w) = ||v - w||$ で定義するものと一致する。)

(4) 行列 $P \in M_{l,m}(\mathbb{R})$ に対し、その**作用素ノルム** を

$$||P|| = \sup_{\substack{v \in \mathbb{R}^l \\ ||v|| \le 1}} ||P \cdot v||$$

で定義する。

一般に、ベクトルや行列に対するノルムの定義はいくつもあり、その時々に便利なものを用いるのが良い。ここでは横着して上のもののみを考えることにする。

**補題 9.1.** (1) 内積は双線型である。

(2) ベクトルに対してのノルム $v \mapsto ||v||$ はノルムの公理を満たす。すなわち、
 (a) $\forall v \in \mathbb{R}^m \ ||v|| \ge 0.$
 (b) $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0.$
 (c) $\forall v, w \in \mathbb{R}^m \quad ||v + w|| \le ||v|| + ||w||.$
 (d) $\forall c \in \mathbb{R} \forall v \in \mathbb{R}^m \quad ||cv|| = |c| \cdot ||v||.$

(3) 行列 $P$ に対して、その作用素ノルムは常に有限であり、$P \mapsto ||P||$ はノルムの公理を満たす。

(4) 任意の行列 $P$ と *(*それと乗算可能なサイズを持つ*)* 任意のベクトルに対して $||P \cdot v|| \le ||P|| \cdot ||v||$ が成り立つ。

**定理 9.1.** $U$ は $\mathbb{R}^m$ の開集合であるとし、$f : U \to \mathbb{R}^m$ は $C^1$ 級であるとする。*(*定義域と値域の次元が同じであることに注意。*)* $x_0 \in U$ において、$Df|_{x_0}$ が行列として可逆であると仮定し、その逆行列を $L$ とおく。正の実数 $r_0$ を次のような条件を満足するようにとる。

$$x \in B_0 \overset{\text{def}}{=} B_{r_0}(x_0) \implies \begin{cases} x \in U & \text{(つまり、} B_{r_0}(x_0) \subset U.) \\ ||I - Lf'(x)|| < \frac{1}{2} \\ ||f(x) - f(x_0)|| < \frac{1}{2||L||} \end{cases}$$

($f$ が $C^1$ 級だという仮定によりこのような $r_0$ は存在する。) このとき、

(1) $f$ は $B_0$ 上単射である。

(2) $r_1 = \frac{r_0}{2||L||}$, $B_1 = B_{r_1}(f(x_0))$ とおくと、$B_1$ 上定義された $C^1$ 級関数 $g$ が存在して、

$$f \circ g|_{B_1} = id_{B_1}$$

がなりたつ。

上の定理の証明のキモは、以下の補題 (Newton 法) である。ただし、$Df_x$ の逆行列のところを、$L$ で置き換える部分が、本物の Newton 法とは異なる。

**補題 9.2.** 定理の仮定の下で、次のような $B_1 \times B_0$ 上の $\mathbb{R}^m$ 値関数を考えよう。

$$\varphi(y,x) = x + L(y - f(x)) \qquad (x \in B_0, y \in B_1)$$

すると、 $\varphi$ の像は $B_0$ に入る。

**補題 9.3.** 上の定理の仮定のもとで、上の補題の $\varphi$ を考えて、次のような $B_1$ 上の関数列 $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ を定義する。

$$\begin{cases} g_1(y) = x_0 & (\text{定数関数}) \\ g_{j+1}(y) = \varphi(y, g_j(y)) \end{cases}$$

すると $\{g_j\}$ はある関数 $g(x)$ に各点収束する。

**定理 9.2.**

$$f \circ g = \mathrm{id}$$

のとき、

$$Dg|_y = (Df|_{g(y)})^{-1}$$

とくに、$f$ が $C^n$ 級なら、$g$ も $C^n$ 級である。

逆写像定理では、定義域と値域の次元が等しく、なおかつ点 $x_0$ での $f$ の微分 $Df|_{x_0}$ が可逆であることが適用のポイントである。しかし、下のような考え方を用いて、定義域と値域の次元が違う場合にも、逆関数の定理を応用することができる。ここでは大まかな考え方のみ書いておこう。(詳細は乞御研究)

**命題 9.3.** *(陰関数の定理)* $f : \mathbb{R}^{n+s} \to \mathbb{R}^n$ が $C^\infty$ 級で、なおかつ線型写像

$$\hat{f} : (x,y) \to (f(x,y), y) \in \mathbb{R}^{n+s} \quad (x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^s)$$

が $\det(D\hat{f}|_{(x_0,y_0)}) \neq 0$ を満足したとする。$c = f(x_0,y_0)$ とおこう。このとき $\hat{f}$ の局所的な逆写像

$$\hat{g} : (x,y) \to (g(x,y), y) \quad (x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^s)$$

が存在する。すなわち、$f(g(x,y),y) = x$ が $(c, y_0)$ に近いすべての $x, y$ に対して成り立つ。とくに、$h(y) = g(c,y)$ は

$$f(h(y), y) = c$$

をすべての $y$ について満足する。これは、方程式 $f(x,y) = c$ を $y$ について解いたことに相当する *(*陰関数*)*。

逆写像の定理や陰関数の定理は微分可能多様体の理論 (とくに埋め込みや沈め込みの議論、特異点の議論など) において基本的になる。

※レポート問題

(期限：次の講義の終了時まで。)

**問題 9.1.**

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^3 - y^2 \\ y \end{pmatrix}$$

なる (二変数ベクトル値) 関数の $(a,b)$ における微分 $Df|_{(a,b)}$ をもとめよ。 $\det(Df|_{(a,b)}) = 0$ となるのはいつだろうか? (つまり、$(a,b)$ がどのような値のときか?)

**問題 9.2.** 前問の $f$ を命題 9.3 の $\hat{f}$ とみて (つまり $f(x,y) = x^3 - y^2$ とみて) 命題 9.3 にあるように逆写像定理を適用すると、どのような陰関数をえることができるだろうか?すなわち、どのような方程式を満足するような関数 $h$ を得ることができるだろうか?